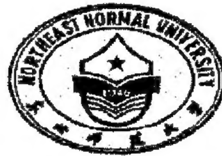
学校代码： 10200　　　　研究生学号：1213102981
分 类 号： O175.12　　　　密　　级： 无



东北师范大学

博士学位论文

脉冲微分系统的周期问题

Periodic Problem of the Impulsive Differential Systems

作者：张晓颖

指导教师：王克 教授
学科专业：应用数学
研究方向：应用微分方程

东北师范大学学位评定委员会

2005 年 10 月

摘 要

本文主要研究了一阶、二阶脉冲微分方程的周期边值问题的周期解的存在性问题, 以及脉冲微分方程应用于具体的生物模型, 对生物资源脉冲捕获的最优开发问题. 综合了作者在攻读博士学位期间的完成的系统的论文成果.

全文共分成五章:

第一章作为准备知识给出了本文要用到的相关内容, 其中包括非线性泛函分析理论和脉冲微分方程理论.

第二章给出了时滞Lotka-Volterra 型和具有有限时滞的一阶脉冲微分方程周期边值问题存在周期解的充分条件. 并且具体讨论了生态学中所提出的各类时滞脉冲微分方程模型, 包括: logistic模型, 红细胞再生模型、绿豆蝇模型和多个偏差变元的周期Logistic方程等. 得到了一些新成果, 推广并改进了已有的相关的成果.

第三章是关于有奇异的二阶脉冲微分方程周期边值问题的周期解的存在性问题. 众所周知, 二阶脉冲微分方程具有非常重要的物理意义. 本章所使用的方法是Leray-Schauder抉择及锥不动点定理.

第四章利用重合度理论, 研究了具体的非自治脉冲微分方程互惠模型和捕食者食模型的脉冲周期解的存在性问题.

第五章结合实际的可操作的原则, 考虑对资源的开发是间隔性的, 是脉冲式进行的, 用脉冲开发的假设去研究资源的可持续发展问题, 获得脉冲周期解的全局稳定性和最优的捕获策略. 推广了Canada学者Clark C W的关于可更新生物资源的最优开发的经典结果.

在论文的最后, 总结了论文的创新点提出了论文的改进方向以及研究中所参考的主要文献.

关键词: 时滞脉冲微分方程; 周期解; 存在性; 奇异; Leray-Schauder 抉择; 锥不动点; 重合度; 可更新生物资源的最优开发.

Abstract

This paper discuss mainly the existence of positive solutions to periodic boundary value problems for first or second order impulsive differetial equations. In addition, impulsive differential equations applies to biological system, meanwhile, the optimal harvest policy with impulsive harvest is considered.

This paper include most of research work when the author persue her Ph.D. degree.

The whole contents is divided into five chapters.

Chapter 1, as the beginning of this paper, offers some relative knowledge, such as preliminary qualitative theory of differential equation, basis theory of nonlinear functional analysis, theory of impulsive differential equation.

Chapter 2, we obtained the existence positive periodic solutions of periodic boundary value problem for first order Lotka-Volterra integral differential equation with impulse effects and first order impulsive differential equation with delay. We mainly concerns the existence of the nonlinear continuous systems that have previously appeared in the population dyanmics literature such as single species logistic growth models, the model of blood cell production, and so on. New easily verifiable sufficient conditions are derived which improve and generalize related results.

Chapter 3, Focuses on the existence positive periodic solution of periodic boundary problem for second order impulsive differential equation. As we all know the second order impulsive differential equation has much important physics significance to study. The method used here is alternative Leray-Schauder type and on the krasnoselskii fixed point theorem, and studied the periodic solution of repulsive singular differential equation with impulse effects.

Chapter 4, using the coincidence degree and the priori estimations, discuss the nonautonomous impulsive differential equations, including a predator-prey system and a cooperative systems.

Chapter 5, combined the feasible principle, specially consider supposition of impulsive harvest and study sustainable development of biologic resources under the impulsive harvest, derive the existence and global asymptotically stability of impulsive periodic solution, furthermore, the optimal harvest policy is obtained. The classical re-

sults of Clark's for the management of renewable biological resources are generalized.

At the end of the paper, it is proposed the remark of this paper and the further study direction, many related references are listed.

Key Words: Impulsive differential equation with delay; Periodic solutions; Existence; Singular; Alternative of Leray-Schauder; krasnoselskii fixed point theorem; Coincidence degree; Optimal harvesting policy for renewable biological resources.

独 创 性 声 明

本人声明所呈交的学位论文是本人在导师指导下进行的研究工作及取得的研究成果。据我所知，除了文中特别加以标注和致谢的地方外，论文中不包含其他人已经发表或撰写过的研究成果，也不包含为获得东北师范大学或其他教育机构的学位或证书而使用过的材料。与我一同工作的同志对本研究所做的任何贡献均已在论文中作了明确的说明并表示谢意。

学位论文作者签名：张晓颖 日 期：05、12、6

学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解东北师范大学有关保留、使用学位论文的规定，即：东北师范大学有权保留并向国家有关部门或机构送交学位论文的复印件和磁盘，允许论文被查阅和借阅。本人授权东北师范大学可以将学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或其它复制手段保存、汇编学位论文。

（保密的学位论文在解密后适用本授权书）

学位论文作者签名：张晓颖 指导教师签名：王克

日 期：05、12、6 日 期：05、12、6

学位论文作者毕业后去向：

工作单位：________ 电 话：________

通讯地址：________ 邮 编：________

引 言

脉冲现象作为一种瞬时突变现象, 在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的. 许多实际问题的发展过程往往有这样的特征：在发展的某些阶段,会出现快速的变化. 为方便起见, 在这些过程的数学模拟中, 常常会忽略这个快速变化的持续期间而假设这个过程是通过瞬时突变来完成的. 这种突变现象通常称之为脉冲现象. 脉冲现象在现代科技各领域的实际问题中是普遍存在的, 其数学模型往往可归结为脉冲微分系统. 脉冲微分系统最突出的特点是能够充分考虑到瞬时突变现象对状态的影响, 能够更深刻、更精确地反映事物的变化规律. 近年最新科技成果表明, 这类系统在航天技术、信息科学、控制系统、通讯、生命科学、医学、经济领域均得到重要应用.

对脉冲微分方程的研究始于1960年V.D.Mil'man 和A.D.Myshkis的工作见文献[28]. 自20世纪80年代, 逐步引起广大专家、学者的关注并致力于从理论上对其进行研究. 到80年代末对其研究已有一些重要的成果发表. 例如, 建立了关于依赖于状态的脉冲微分系统的基本理论, 关于脉冲微分不等式的一些重要结果, 关于脉冲微分方程的稳定性基本定理等. 这些结果已被V.Lakshimikantham等进行了系统的总结见文献[3], 这一时期的研究成果的特点是所考虑的系统只含脉冲而不含时滞.

自90年代以来脉冲微分方程作为非线性微分系统领域的一个新的分支, 更加引起专家的重视和兴趣, 关于解的稳定性[5,8-10,34,44]、摄动性[6]、解的有界性[85,138]已获得一批新的重要的研究成果, 如得到具有有界滞量或无穷时滞的脉冲泛函微分方程解的唯一性定理[58]、整体存在性定理[44,85]、延展定理、及解的连续依赖性定理; 利用高阶导数V函数法、变分V函数法, 部分变元V函数法等新方法给出脉冲摄动微分系统、脉冲混合微分系统、脉冲泛函微分系统等关于测度的稳定性定理[147,148,149]; 关于脉冲微分系统的边值问题也有了一些很好的结果[11,46,50-57,60-64,87,92,97]. 对于脉冲自治系统的几何理论和脉冲偏微分系统振动理论等问题的研究都取得了很大的进展. 这些结果被傅希林等系统的总结参见文献[81].

陈兰荪在2002年简述了近年来脉冲微分方程在生命科学中的应用[140], 其中包括在药物动力学, 种群动力学, 传染病模型以及可再生资源的最优管理方面的应用. 并且具体讨论了Lotka-Volterra生态数学模型, 传染病模型等在有脉冲的情

况下的持久性, 周期性等动力学行为得到了一些很好的结果[140–146].

但是我们知道脉冲微分系统在理论上它综合了连续和离散的特点, 同时又超出了连续和离散的范围. 还存在许多问题有待解决.

由于在现实生活中我们经常会看到一些周期的脉冲现象, 例如: 时间的周期性, 许多种群的出生是不连续的, 而是在一些固定的时间点（如某些野生动物的出生是季节性的, 可以把在这些点种群的出生看作是对种群系统的脉冲, 因此用脉冲微分方程周期系统能够更精确的描述这种种群系统的特征. 对脉冲微分方程周期系统理论研究中的一个基本问题是对方程解的存在性的研究, 确定是否存在周期解、什么条件下存在周期解. 周期解理论无疑是脉冲微分方程理论研究中的一个重要课题. 周期解的存在性的讨论通常往往有两种办法, 通过估计解的可能的界, (1)利用重合度理论得出解的存在性; (2)利用上下解的理论也可以得出解的存在性. 然而任何一种证明方法都有它的局限性, 事实上, 在实际操作中是比较难估计解的上界和下界的.

本文主要研究脉冲微分方程周期边值问题周期解的存在性及其在生态系统中的应用, 还有可持续生物资源的脉冲式开发问题.

本文主要安排如下: 第一章给出了证明本文主要结论时所要用到的一些预备知识; 第二章讨论了一阶时滞Lotka-Volterra型脉冲微分方程和一阶有限时滞脉冲微分方程周期解的存在性; 第三章证明了二阶脉冲微分方程周期解的存在性条件并重点讨论了二阶奇异脉冲微分方程解的存在性; 第四章研究了具体的非自治脉冲微分方程互惠模型和捕食者食模型的脉冲周期解的存在性问题. 第五章结合实际的可操作的原则, 用脉冲开发的假设去研究资源的可持续发展问题, 获得脉冲周期解的全局稳定性和最优的捕获策略. 推广了Canada学者Clark C W的关于可更新生物资源的最优开发的经典结果.

第一章　预备知识

本论文主要考虑一阶脉冲微分方程的周期解的存在性以及具有周期边值条件的一阶、二阶脉冲微分方程解的存在性问题. 并且讨论了有奇异的脉冲微分方程解的情况。接下来结合实际情况, 考虑可更新资源的最优开发问题. 考虑对资源的开发是间隔的、脉冲式的. 用脉冲开发的假设去研究资源的可持续发展问题. 为此我们先给出一些后面要用到的定理和一些相关知识, 主要来自文献[40].

1.1 锥不动点理论

定理 1.1 (Arzela-Ascoli定理) 集合$M \subset C(J,R^1)$相对紧的充分必要条件是:

(i)集合M中的函数一致有界, 即存在常数$K>0$, 使得对一切$u=u(t)\in M$, 都有$u(t)\le K$, $\forall t\in J$;

(ii)集合M中的函数等度连续, 即对任给的$\varepsilon>0$, 存在$\delta=\delta(\varepsilon)>0$, 使得当$t_1\in J$, $t_2\in J$, $|t_1-t_2|<\delta$时, 对任给的$u=u(t)\in M$, 都有$|u(t_1)-u(t_2)|<\varepsilon$.

定义 1.1 设E是一个拓扑空间, $X\subset E$, 若存在连续算子$r:E\to X$, 使当$x\subset X$时恒有$r(x)=x$, 则称X是E的一个收缩核, 算子r称为是一个保核收缩.

定理 1.2 实Banach 空间E中的任何非空凸闭集X都是E的收缩核; 并且对于任意的$\alpha>0$, 存在保核收缩r_α, 使

$$\|x-r_\alpha(x)\|\le(1+\alpha)\rho(x,X),\quad \forall x\in E,$$

其中$\rho(x,X)$表示x到集合X的距离.

定理 1.3 设X是实Banach 空间E中的一个收缩核, 对于X的每个有界开集$U\subset X$, 设$A:\overline{U}\to X$全连续且在∂U上没有不动点(即$Ax\ne x$), 其中$\overline{U}$和∂U分别是U相对于X的闭包和边界, 则存在整数$i(A,U,X)$(称为A在U上关于X的不动点指数), 满足下面条件:

(i) 正规性: 若$A:\overline{U}\to U$是常算子, 则$i(A,U,X)=1$;

(ii) 可加性: 若U_1和U_2是U的互不相交的子集, 都是开的(关于X)并且A在$U\setminus(U_1\cup U_2)$上没有不动点, 则

$$i(A,U,X)=i(A,U_1,X)+i(A,U_2,X).$$

这里$i(A,U_k,X)=i(A|_{U_k},U_k,X)\quad(i=1,2)$;

(iii) 同伦不变性: 设$H:[0,1]\times\overline{U}\to X$全连续, 使当$(t,x)\in[0,1]\times\partial U$时, 恒有$H(t,x)\neq x$, 则$i(H(t,\cdot),U,X)$与$t$无关;

(iv)保持性: 若Y是X的收缩核, $A(U)\subset Y$, 则

$$i(A,U,X)=i(A,U\cap Y,Y)$$

这里$i(A,U\cap Y,Y)=i(A|_{U\cap Y},U\cap Y,Y)$;

(v)切除性: 若V是开集(关于X), $V\subset U$, 且A在$U\setminus V$上没有不动点, 则

$$i(A,U,X)=i(A,V,X);$$

(vi)可解性: 若$i(A,U,X)\neq 0$, 则A在U中至少有一个不动点.

定理 1.4 设$\theta\in\Omega,A:P\cap\overline{\Omega}\to P$是全连续算子, 并且满足

$$Ax=\mu x,x\in P\cap\partial\Omega\Rightarrow\mu<1.$$

那么必有$i((A,P\cap\Omega,P)=1$.

定义 1.2 X是一个Banach 空间, K 是X中的非空闭集. 若K 满足下面的条件

(i) 当$u,v\in K$时，$\alpha u+\beta u\in K,\alpha,\beta\geq 0$.

(ii) $u,-u\in K$ 当且仅当$u=0$.

则K 是一个锥.

定理 1.5 设$X=(X,\|\cdot\|)$是一个Banach空间, K是$X=(X,\|\cdot\|)$中的锥, $r,R(0<r<R)$为常数. 若$\Phi:\overline{\Omega}_R\cap K\to K(\Omega_R=\{x\in X,\|x\|<R\})$ 全连续, 如果满足条件

(i) $x\neq\lambda\Phi x,\quad\lambda\in[0,1],\quad x\in K\cap\partial\Omega_r$,

(ii) 存在$\psi\in K\setminus\{0\}$ 使得$x\neq\Phi x+\delta\psi$ $x\in K\cap\partial\Omega_R$ 和$\delta\geq 0$.

则Φ 在$K\cap\{x\in X:r<\|x\|<R\}$中必有一个不动点.

定理 1.6 定理1.1中,如果(i) 和(ii) 换为

(i)* $x\neq\lambda\Phi x,\quad\lambda\in[0,1],\quad x\in K\cap\partial\Omega_R$,

(ii)* 存在$\psi \in K\backslash\{0\}$ 使得$x \neq \Phi x+\delta\psi \quad x \in K\cap\partial\Omega_r$ 和$\delta \geq 0$.

则Φ 在$K\cap\{x\in X: r<\|x\|<R\}$中必有一个不动点.

定理 1.7 设X 是一个Banach空间, K 是X 中的锥. 若Ω_1, Ω_2 是X 中的开集且$\theta \in \Omega_1$, $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega_2$. $\Phi: K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to K$ 是全连续算子使得

(i) $\|\Phi x\| \leq \|x\|, \forall x \in K\cap\partial\Omega_1$,

(ii) 存在$\psi \in K\backslash\{0\}$ 使得$x \neq \Phi x+\lambda\psi$ for $x \in K\cap\partial\Omega_2$ 和$\lambda > 0$.

则Φ 在$K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$中必具有不动点.

定理 1.8 定理1.3中, 如果(i) 和(ii) 换为

(i)* $\|\Phi x\| \leq \|x\|, \forall x \in K\cap\partial\Omega_2$,

(ii)* 存在$\psi \in K\backslash\{0\}$ 使得$x \neq \Phi x+\lambda\psi$ for $x \in K\cap\partial\Omega_1$ and $\lambda > 0$,

则Φ 在$K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$.中具有一个不动点.

1.2 Leray-Schauder 不动点理论

定理 1.9 (Leray-Schauder 不动点定理) 令C 为Banach空间中的一个闭凸集, 如果$f: C\to C$ 且f 是紧的(C 中的有界集映为相对紧集), 则f 在C中有一个不动点.

定理 1.10 Banach空间中的一个凸紧集有一个不动点.

定义 1.3 设$f: X\to X$, X 为Banach空间, 如果存在一个$r>0$, 使得$\|x\|=r$, 即$f(x)\neq \lambda x$, $\forall\lambda>1$, 则称f 满足Leray-Schauder 边值条件.

定理 1.11 (Leray-Schauder 抉择定理) 令$f: X\to X$是全连续的且如果f 满足Leray-Schauder 边值条件, 则f有一个不动点.

1.3 重合度理论

令X, Z 是赋范向量空间, $L: DomL\subset X\longrightarrow Z$为线性映射, $N: X\longrightarrow Z$ 为连续映射. 如果ImL 是Z的闭子空间且$KerL = codimImL < +\infty$ 则称L 是个零指标的Fredholm 的映射. 如果L 是个零指标的Fredholm 的映射, 则存在连续投影$P: x\longrightarrow X$ $Q: Z\longrightarrow Z$ 使得$ImP = kerL, kerQ = ImL = Im(I-Q)$. 则$L\backslash domL\cap KerP: (I-p)X\longrightarrow ImL$可逆,设其逆映射为$K_p$. 设$\Omega$ 是X中的一个有界开集, 如果$QN(\bar{\Omega})$ 且$K_p(I-Q)N: \bar{\Omega}\longrightarrow X$ 是紧的. 则称映射N在$\bar{\Omega}$上是L-紧的, 由于ImQ 与$KerL$同构, 因而存在一个同构映射$J: ImQ\longrightarrow KerL$.

定理 1.12 L是指标为零的Fredholm 的映射, N在$\bar{\Omega}$是L–紧. 假设

(a) 对任意的$\lambda \in (0,1)$, 方程$Lx = \lambda Nx$的解, 满足$x \notin \partial\Omega$;

(b) 对任意的$QNx \neq 0, x \in \partial\Omega \cap Ker$ 且

$$deg(JQN, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$$

则方程$Lx = Nx$ 在$domL \cap \bar{\Omega}$内至少存在一个解.

第二章　一阶脉冲微分方程

由于地球的自转和公转所造成周期性变化的环境因素, 使很多自然现象都具有周期性, 例如:白天、黑夜的周期性变化(日周期); 春、夏、秋、冬一年四季的周期性变化(年周期)等等, 这些自然现象的周期性变化, 是影响生物种群增长的重要因素, 生物的周期性就是对这些周期现象适应的结果, 例如: 光周期、温周期等. 人类的一些周期性行为(如:周期性捕猎)对生物种群的发展也产生重要的影响. 生态系统及其参数受季节变化、事物增减等因素的影响, 发生周期性变化, 为了正确地模拟这种变化, 需要系统引入周期项, J.M.Cushing[89,91,96,101]指出, 考虑生态系统的周期干扰和生态参数的周期性变化是重要而合理的.

时间的滞后(时滞)是影响生物种群增长的又一重要因素, 在许多情况下, 生物种群的密度变化对增长率的影响效应都不是瞬时发生的, 而是有时间延迟的, 例如: 对繁殖前期较长的物种, 高密度对出生率的影响往往出现在较长时间以后. 因此在生态学数学模型的研究中, 为了更真实地反映客观世界, 实滞是一个不可忽略的重要因素.

脉冲效应也是影响生物种群增长的重要因素, 如果考虑到捕获、狩猎等突发因素的影响, 那么带有脉冲的生态模型就要比没有脉冲的生态模型更加符合实际.

本章综合考虑实际生态过程中的周期性、时滞性和脉冲效应, 来研究脉冲时滞微分方程模型. 对于周期、时滞、脉冲微分方程所描述的种群增长模型, 一个自然的问题就是是否存在周期解、什么条件下存在周期解. 本章主要利用锥不动点定理讨论周期、时滞一阶脉冲微分方程模型的周期正解的存在性问题.

目前, 对于泛函微分方程和脉冲微分方程的稳定性和周期解的存在性问题的讨论已有了广泛的研究(参见文献[1,28-33,153]). 而对于有脉冲的一阶泛函微分方程的稳定性和周期性的研究也有了一些初步的不错的成果[34-36,48].

文[61], 利用重合度理论讨论了依赖于状态的一阶脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \neq \tau_k(x), \\ \Delta x|_{t=\tau_j(x)} = I_k(x), & k = 1, 2, \cdots, p, \end{cases}$$

至少存在一个解.

文[59], 利用上下解的理论讨论了一阶脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+F(t,x(t))=0, & t\neq t_k, \ a.e. \ t\in[0,T]-\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}, \\ x(t_k^+)=x(t_k^-)+I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p, \end{cases} \tag{2.1}$$

至少存在一个正解.

文[11], 利用Schaeffer's定理得到了一阶脉冲微分方程系统(2.1)的周期边值问题至少存在一个解的充分条件.

文[84], 讨论了有脉冲的一阶泛函微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+a(t)x(t)+F(t,x(\cdot))=0, & t\neq t_k, \ a.e. \ t\in R, \\ x(t_k^+)=x(t_k^-)+I_k(x(t_k)), & k\in N, \end{cases}$$

零解的一致稳定性和一致渐近稳定性.

文[85], 进一步改进了文[84]的结果, 得到解的稳定性和一致渐近稳定性的充分条件, 而且利用leggett-williams 不动点定理和Mawhin重合度理论讨论了系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+a(t)x(t)+F(t,x(\cdot))=e(t), & t\neq t_k, \ a.e. \ t\in R, \\ x(t_k^+)=x(t_k^-)+I_k(x(t_k)), & k\in N, \end{cases}$$

正解的存在性.

最近, 文[26]利用锥不动点定理研究了下面的广义非自治的泛函微分方程单个周期正解的存在性

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+g(t,y(t-\tau(t))), \tag{2.2}$$

其中$a\in C(R,(0,\infty))$, $\tau\in C(R,R)$, $g\in C(R\times[0,\infty),[0,\infty))$, 且$a$, τ, g 都是ω-周期函数. $\omega>0$为常数.

引理 2.1 [26] 如果下面条件成立

$$(i)\ \liminf_{u\downarrow 0}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u}>1 \quad 和 \quad \limsup_{u\uparrow\infty}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u}<1;$$

$$(ii)\ \limsup_{u\downarrow 0}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u}<1 \quad 和 \quad \liminf_{u\uparrow\infty}\min_{t\in[0,\omega]}\frac{g(t,u)}{a(t)u}>1.$$

则方程(2.2)至少存在一个ω-周期正解.

众所周知，讨论泛函微分方程(2.2)是具有非常重要的实际意义的，它可以包括许多生物数学模型.

例如，广义泛函微分方程[27]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)f(t,y(t-\tau(t))), \tag{2.3}$$

红细胞再生模型[10,12,14]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)e^{-\beta(t)y(t-\tau(t))}, \tag{2.4}$$

更广义的红细胞再生模型[10,12,17,19]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\frac{1}{1+y(t-\tau(t))^n},\quad n>0, \tag{2.5}$$

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\frac{y(t-\tau(t))}{1+y(t-\tau(t))^n},\quad n>0, \tag{2.6}$$

和广义绿豆蝇模型[10, 12, 15, 16, 18]

$$\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)y(t-\tau(t))e^{-\beta(t)y(t-\tau(t))}. \tag{2.7}$$

因此对模型(2.2)的研究具有非常重要的理论和实际意义.

2.1 时滞Lotka-Volterra 型一阶脉冲微分方程

本节主要讨论下面系统的周期解的存在性问题

$$\begin{cases}\dot{y}(t)=-a(t)y(t)+\int_{-\infty}^{0}K(r)g(t,y(t+r))dr, & t\neq t_j,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), & j\in Z,\quad t=t_j,\end{cases} \tag{2.8}$$

其中

(A_{11}): $y(t_j^+)$ 和$y(t_j^-)$ 分别表示$y(t_j)$在$t=t_j$点的右极限和左极限, y 在t_j点是左连续的;

(A_{12}): $a(t)\in C(R,(0,\infty))$, $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$ 且$\int_{-\infty}^{0}K(r)dr=1$. $g\in C(R\times[0,\infty),[0,\infty))$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, 和$a(t)$, $g(t,y)$ 都是ω-周期函数. $\omega>0$ 是常数;

(A_{13}): 存在一个正整数p 使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $I_{j+p}=I_j$, $j\in Z$. 不失一般性, 我们假设$[0,\omega)\bigcap\{t_j:\ j\in Z\}=\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$.

2.1.1 周期解的存在性

我们首先考虑"线性问题"

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t)+\sigma(t), \quad t\neq t_j, \quad j\in Z, \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.9}$$

其中$\sigma(t)\in C(R,[0,\infty))$ 为ω-周期函数, 其余的参数满足假设条件$(A_{11})-(A_{12})-(A_{13})$.

事实上, 由于脉冲函数不一定是线性的, 因此(2.9)并不是一个真正的线性问题. 然而, 如果I_j $(j=1,2,\cdots,p)$ 是线性的, 则(2.9)便是一个线性脉冲问题.

为此我们来给出下面的基本引理.

引理 2.2 $y(t)$ 是方程(2.9)的一个ω-周期解等价于$y(t)$ 是下面的积分微分方程的ω-周期解:

$$y(t)=\int_{t}^{t+\omega}G(t,s)\sigma(s)ds+\sum_{j:\ t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)), \tag{2.10}$$

其中

$$G(t,s)=\frac{e^{\int_t^s a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^{\omega} a(\xi)d\xi}-1}. \tag{2.11}$$

证明: 假设$y(t)$是(2.9)的一个ω-周期解.

令$y(t)=e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}u(t)$. 则$u$ 满足下面的方程

$$\begin{cases} \dot{u}(t)=\sigma^*(t), & t\neq t_j, \\ u(t^+)=u(t^-)+I_j^*(u(t)), & t=t_j, \\ u(t+\omega)=e^{\int_0^{\omega} a(\xi)d\xi}u(t), \end{cases} \tag{2.12}$$

其中对$\forall j \in Z$,

$$\sigma^*(t) = e^{\int_0^t a(\xi)d\xi}\sigma(t), \quad I_j^*(u(t_j)) = e^{\int_0^{t_j} a(\xi)d\xi} I_j(e^{-\int_0^{t_j} a(\xi)d\xi} u(t_j))$$

当$t \in [t_j, t_{j+1}], j \in Z$时, 得

$$u(t) = u(t_j^+) + \int_{t_j}^t \sigma^*(s)ds.$$

另一方面,

$$u(t_j^-) = u(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma^*(s)ds,$$

则, 当 $t \in (t_j, t_{j+1}], j \in Z$, 时,

$$\begin{aligned} u(t) &= u(t_j^-) + I_j^*(u(t_j)) + \int_{t_j}^t \sigma^*(s)ds \\ &= u(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sigma^*(s)ds + I_j^*(u(t_j)) + \int_{t_j}^t \sigma^*(s)ds \\ &= u(t_{j-1}^+) + \int_{t_{j-1}}^{t} \sigma^*(s)ds + I_j^*(u(t_j)). \end{aligned} \tag{2.13}$$

则对任意的 $t \in R$, 存在$j \in Z$, 使得 $t \in (t_j, t_{j+1}]$, 则

$$t + \omega \in (t_j + \omega, t_{j+1} + \omega] = (t_{j+p}, t_{j+p+1}], j \in Z.$$

由上式,得

$$\begin{aligned} u(t+\omega) &= u(t_{j+p-1}^+) + \int_{t_{j+p-1}}^{t+\omega} \sigma^*(s)ds + I_{j+p}^*(u(t_j)) \\ &= u(t_{j+1}^+) + \int_{t_{j+1}}^{t+\omega} \sigma^*(s)ds + \sum_{j:t_k \in [t_{j+1}, t+\omega)} I_k^*(u(t_k)) \\ &= u(t_{j+1}^-) + \int_{t_{j+1}}^{t+\omega} \sigma^*(s)ds + \sum_{j:t_j \in [t, t+\omega)} I_j^*(u(t_j)) \\ &= u(t) + \int_{t}^{t+\omega} \sigma^*(s)ds + \sum_{j:t_j \in [t, t+\omega)} I_j^*(u(t_j)), \end{aligned}$$

且

$$u(t+\omega) - u(t) = \int_t^{t+\omega} \sigma^*(s)ds + \sum_{j:t_j \in [t, t+\omega)} I_j^*(u(t_j)).$$

所以,

$$u(t)[e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1]=\int_t^{t+\omega}\sigma^*(s)ds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}I_j^*(u(t_j)),$$

即

$$u(t)=\frac{\int_t^{t+\omega}\sigma^*(s)ds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}I_j^*(u(t_j))}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1}.$$

因此

$$\begin{aligned}y(t) &= \frac{e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}\int_t^{t+\omega}e^{\int_0^s a(\xi)d\xi}\sigma(s)ds}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1}+\frac{e^{-\int_0^t a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}-1}\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}e^{\int_0^{t_j}a(\xi)d\xi}I_j(y(t_j))\\ &= \int_t^{t+\omega}G(t,s)\sigma(s)ds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)).\end{aligned}$$

证毕.

由引理2.2, 我们很容易得到下面的引理2.3.

引理 2.3 若$y(t)$是方程(2.8)的ω-周期解等价于$y(t)$是下面的积分微分方程的ω-周期解:

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))drds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)), \qquad (2.14)$$

其中$G(t,s)$同(2.11)的定义相同.

定义

$$PCB(R)=\{y:R\to R|y\in C(t_j,t_{j+1}),\ \ y(t_j^-)=y(t_j),\ \exists\, y(t_j^+), j\in Z,$$

$y(t)$ 是R上的有界连续函数}.

$$X=\{y(t):y(t)\in PCB(R),y(t+\omega)=y(t)\}. \qquad (2.15)$$

定义

$$\|y\|=\sup_{t\in[0,\omega]}\{|y(t)|:y\in X\}.$$

X是一个实的Banach空间. 对任意的$y\in X$, 定义下面的算子:

$$(\Phi y)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,y(s+r))drds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)), \quad (2.16)$$

令

$$K=\{y\in X:y(t)\geq 0 \quad 和 \quad y(t)\geq\sigma\|y\|\},$$

$$A:=\min\{G(t,s):0\leq t,s\leq\omega,\}=\frac{1}{e^{\int_0^{\omega}a(\xi)d\xi}-1}>0,$$

$$B:=\max\{G(t,s):0\leq t,s\leq\omega,\}=\frac{e^{\int_0^{\omega}a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^{\omega}a(\xi)d\xi}-1}>0, \quad (2.17)$$

其中$0<\sigma=A/B<1$. 不难证明K是X中的一个锥.

引理 2.4 $\Phi:K\to K$ 全连续算子.

证明: 假设$A\subset K$是一个有界集, 则存在一个常数$M_1>0$对任意的$y_1\in A$, 使得$\|y_1\|\leq M_1$. 则当$y\in A$时,

$$|(\Phi y)(t)|\leq B\int_0^{\omega}|\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,y(s+r))dr|ds+B\sum_{j:t_j\in[0,\omega)}|I_j(y(t_j))|$$

$$\leq B\int_0^{\omega}\int_{-\infty}^{0}K(r)drds\max_{s\in[0,\omega],|y|\leq M_1}g(s,y)+Bp\max_{|y|\leq M_1}|I_j(y)|=M_2,$$

因此, $\Phi(A)$ 在K上是有界的.

其次对任意的$y\in A$, 根据$\Phi(y)$的定义

$$\begin{cases}(\Phi y)'(t)=-a(t)(\Phi y)(t)+\int_{-\infty}^{0}K(r)g(t,y(t+r))dr, & t\neq t_j,\\ (\Phi y)(t_j^+)=(\Phi y)(t_j^-)+I_j((\Phi y)(t_j)), & j\in Z, \quad t=t_j.\end{cases}$$

由$\Phi(y)$的有界性, 令$\overline{I_1}=[0,t_1],\overline{I_2}=(t_1,t_2],\cdots,\overline{I_p}=(t_{p-1},t_p],\overline{I_{p+1}}=(t_p,\omega]$. 则对任意的$t\in\overline{I_1}$, $(\Phi y)'$在K上有界, 则Φy在$t\in\overline{I_1}$上等度连续. 类似的讨论可知,Φy 在$t\in\overline{I_k},k=1,2,\cdots,p+1$上等度连续. 所以$\Phi(A)$ 是等度连续的. 根据Arzela-Ascoli 定理, $\overline{\Phi(A)}$ 是紧的.

最后我们来证明$\Phi:K\to K$ 是连续的. 令$\|y^{(n)}-y^{(0)}\|\to 0$, 由$y(t)$, $g(t,y)$ 都是ω 周期连续函数, $g(s,y^{(n)}(s+r))\to g(s,y^{(0)}(s+r))$, $\forall s\in R$. $I_j(y^{(n)}(t_j))\to I_j(y^{(n)}(t_j))$,

$n \to \infty$. 根据勒贝格控制收敛定理和(2.16)式, 对任意的$t \in R$, 有

$$|(\Phi y^{(n)})(t) - (\Phi y^{(0)})(t)| \le \int_t^{t+\omega} G(t,s) \int_{-\infty}^{0} K(r)|g(s, y^{(n)}(s+r)) - g(s, y^{(0)}(s+r))| dr ds$$

$$+ \sum_{j: t_j \in [t, t+\omega)} G(t, t_j) |I_j(y^{(n)}(t_j)) - I_j(y^{(0)}(t_j))| \to 0.$$

即

$$\|\Phi y^{(n)} - \Phi y^{(0)}\| \to 0 \text{ as } n \to \infty.$$

所以, $\Phi: K \to K$ 全连续. 证毕.

引理 2.5 $\Phi(K) \subset K$.

证明: 对任意的$y \in K$, 知

$$\|\Phi y\| \le B \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{0} K(r) g(s, y(s+r)) dr ds + B \sum_{j=1}^{p} I_j(y(t_j)),$$

和

$$(\Phi y)(t) \ge A \int_0^{\omega} \int_{-\infty}^{0} K(r) g(s, y(s+r)) dr ds + A \sum_{j=1}^{p} I_j(y(t_j)).$$

因此

$$(\Phi y)(t) \ge \frac{A}{B} \|\Phi y\| = \sigma \|\Phi y\|,$$

$\Phi y \in K$. 证毕.

为了下面讨论方便起见我们引入下面的符号:

$$\begin{aligned}
g_0 &= \liminf_{u \downarrow 0} \min_{t \in [0,\omega]} \frac{g(t,u)}{a(t)u}, & I_0(j) &= \liminf_{u \downarrow 0} \frac{I_j(u)}{u}, \\
g^{\infty} &= \limsup_{u \uparrow \infty} \max_{t \in [0,\omega]} \frac{g(t,u)}{a(t)u}, & I^{\infty}(j) &= \limsup_{u \uparrow \infty} \frac{I_j(u)}{u}, \\
g^{0} &= \limsup_{u \downarrow 0} \max_{t \in [0,\omega]} \frac{g(t,u)}{a(t)u}, & I^{0}(j) &= \limsup_{u \downarrow 0} \frac{I_j(u)}{u}, \\
g_{\infty} &= \liminf_{u \uparrow \infty} \min_{t \in [0,\omega]} \frac{g(t,u)}{a(t)u}, & I_{\infty}(j) &= \liminf_{u \uparrow \infty} \frac{I_j(u)}{u};
\end{aligned}$$

任意的$q > 0$, 定义

$$I_{(q)}(j) = \min_{\sigma q \le u \le q} \frac{I_j(u)}{u}, \qquad I^{(q)}(j) = \max_{\sigma q \le u \le q} \frac{I_j(u)}{u}.$$

本节定义下面的假设:

(H_{21}) $g_0+A\sum_{j=1}^{p}I_0(j)>1$ 和$g_\infty+A\sum_{j=1}^{p}I_\infty(j)>1$;

(H_{22}) $g^0+B\sum_{j=1}^{p}I^0(j)<1$ 和$g^\infty+B\sum_{j=1}^{p}I^\infty(j)<1$;

(H_{23}) 存在$q>0$, 当$\sigma q\le u\le q$ 时, 有

$$\frac{g(t,u)}{a(t)u}+B\sum_{j=1}^{p}I^{(q)}(j)<1,\quad t\in R;$$

(H_{24}) 存在$q>0$, 当$\sigma q\le u\le q$ 时, 有

$$\frac{g(t,u)}{a(t)u}+A\sum_{j=1}^{p}I_{(q)}(j)>1,\quad t\in R.$$

定理 2.1 假设(H_{21}) 和(H_{23}) 成立, 则方程(2.8)至少存在两个正解y_1 和y_2 并且

$$0<\|y_1\|<q<\|y_2\|.$$

对于求方程(2.8) 的ω-周期解等价于求算子Φ 不动点.

下面主要根据定理1.7来证明我们的结论.

证明: 假设(H_{21}) 和(H_{23}) 成立. 利用(H_{21}) 的第一式

$$g_0+A\sum_{j=1}^{p}I_0(j)>1,$$

知, 对$0<\epsilon<1$, 使得,

$$(1-\epsilon)[g_0+A\sum_{j=1}^{p}I_0(j)]>1$$

存在一个常数$0<r<q$ 使得

$$g(t,u)\ge(1-\epsilon)g_0a(t)u,\quad I_j(u)\ge(1-\epsilon)I_0(j)u,\ \text{其中}\ j=1,2,\cdots,\ 0\le u\le r.$$

因此, 若$y\in K$ 且$\|y\|=r$, 则$\sigma r\le y(t)\le r$.

对任意的$t\in R$, 令$\psi\equiv 1$只需证对任意的$y\in K\cap\partial\Omega_1$和$\lambda\geq 0$,

$$y\neq \Phi y+\lambda\psi \tag{2.18}$$

其中$\Omega_1=\{u\in X:\|u\|<r\}$.

若不然, 存在$y_0\in K\cap\partial\Omega_1$和$\lambda_0\geq 0$使得

$$y_0=\Phi y_0+\lambda_0\psi.$$

令$\mu=\min\limits_{t\in[0,\omega]}y_0(t)$. 因此对任意的$t\in R$有

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Phi y_0)(t)+\lambda_0\\
&= \int_t^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y_0(s+r))drds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y_0(t_j))+\lambda_0\\
&\geq \int_t^{t-\omega}G(t,s)a(s)g_0(1-\varepsilon)\int_{-\infty}^0 K(r)y_0(s+r)drds+A\sum_{j=1}^p I_0(j)(1-\epsilon)y_0(t_j)+\lambda_0\\
&\geq \mu g_0(1-\varepsilon)\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)drds+A\sum_{j=1}^p I_0(j)(1-\epsilon)\mu+\lambda_0\\
&= (1-\epsilon)[g_0+A\sum_{j=1}^p I_0(j)]\mu+\lambda_0\\
&> \mu+\lambda_0,
\end{aligned}$$

说明$\mu>\mu+\lambda_0$, 矛盾.

另一方面, 由(H_{23})式, 知存在$q>0$使得$\sigma q\leq u\leq q$满足

$$\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))dr\leq\int_{-\infty}^0 K(r)a(s)u(1-B\sum_{j=1}^p I^{(q)}(j))dr\leq a(s)u(1-B\sum_{j=1}^p I^{(q)}(j)),$$

及

$$I_j(u))\leq I^{(q)}(j)u.$$

令$\Omega_2=\{u\in X:\|u\|<q\}$, 则

$$\sigma q=\sigma\|u\|\leq u(t)\leq\|u\|=q,\ \ \forall\, u\in K\cap\partial\Omega_2.$$

则任意的$y\in K$和$\|y\|=q$, 知

$$
\begin{aligned}
(\Phi y)(t) &= \{\int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))drds + \sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)} G(t,t_j)I_j(y(t_j))\} \\
&< \int_t^{t+\omega}(1-B\sum_{j=1}^p I^{(q)}(j))G(t,s)a(s)qds + B\sum_{j=1}^p I_j(y(t_j)) \\
&\leq q(1-B\sum_{j=1}^p I^{(q)}(j))\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)ds + Bq\sum_{j=1}^p I^{(q)}(j) \\
&= q = \|y\|.
\end{aligned}
$$

因此

$$
\|\Phi y\| \leq \|y\| \quad \forall\, y\in K\cap\partial\Omega_2. \tag{2.19}
$$

由(2.18)和(2.19), 及定理1.7得Φ 有一个不动点$y_1\in K\cap(\bar{\Omega}_2\setminus\Omega_1)$. 这里$r<\|y_1\|<q$ 和$y_1(t)\geq\sigma r>0$, 说明$y_1(t)$是(2.8) ω-周期正解.

下面, 利用(H_{21})的第二式,

$$
g_\infty + A\sum_{j=1}^p I_\infty(j) > 1,
$$

知对任意的$0<\epsilon<1$, 使得,

$$
(1-\epsilon)[g_\infty + A\sum_{j=1}^p I_\infty(j)] > 1,
$$

且存在一个常数$r_1>q$ 使得

$$
g(t,u)\geq g_\infty(1-\epsilon)a(t)u, \quad I_j(u)\geq I_\infty(j)(1-\epsilon)u, \ \forall\, u\geq r_1.
$$

令$R=\frac{r_1}{\sigma}$, 因此,

$$
u(t)\geq\sigma\|u\|=\sigma R=r_1, \ \forall\, u\in K\cap\partial\Omega_3,
$$

其中$\Omega_3=\{u\in X:\|u\|<R\}$.

令$\psi\equiv 1$ 只需对任意的$y\in K\cap\partial\Omega_3$ 和 $\lambda\geq 0$

$$
y\neq\Phi y+\lambda\psi, \tag{2.20}
$$

若不然, 存在$y_0 \in K \cap \partial\Omega_3$ 和$\lambda_0 \geq 0$ 使得

$$y_0 = \Phi y_0 + \lambda_0 \psi.$$

令$\mu = \min_{t\in[0,\omega]} y_0(t)$. 所以任意的$t \in R$ 有

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Phi y_0)(t) + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y_0(s+r))drds + \sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)} G(t,t_j)I_j(y_0(t_j)) + \lambda_0 \\
&\geq \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)g_\infty(1-\varepsilon)\int_{-\infty}^0 K(r)y_0(s+r)drds + A\sum_{j=1}^p I_j(y_0(t_j)) + \lambda_0 \\
&\geq \mu[g_\infty(1-\varepsilon)\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)drds + (1-\varepsilon)AI_\infty(j)] + \lambda_0 \\
&= (1-\epsilon)[(g_\infty + A\sum_{j=1}^p I_\infty(j))]\mu + \lambda_0 \\
&> \mu + \lambda_0,
\end{aligned}$$

说明$\mu > \mu + \lambda_0$, 矛盾.

因此, 由(2.19) 和(2.20)及定理1.7得, Φ 有一个不动点$y_2 \in K \cap (\bar{\Omega}_3 \setminus \Omega_2)$. 这里, $q < \|y_2\| < R$ 和$y_2(t) \geq \sigma q > 0$. 这说明$y_2(t)$ 是(2.8)的ω-周期正解. 证毕.

推论 2.6 如果用下面的(H_{21}^*)式来代替(H_{21})式, 则定理2.1的结论成立.

$$(H_{21}^*) \quad g_0 = \infty \text{ 或 } \sum_{j=1}^p I_0(j) = \infty, \qquad g_\infty = \infty \text{ 或 } \sum_{j=1}^p I_\infty(j) = \infty.$$

证明: 与定理2.1的证明类似, 从略.

注2.3: 如果在定理2.1中我们只假设(H_{23}) 和$g_0 + A\sum_{j=1}^p I_0(j) > 1$成立，则保证系统(2.8)存在一个周期正解$y_1$; 同理, 如果在定理2.1中我们只假设$(H_{23})$ 和$g_\infty + A\sum_{j=1}^p I_\infty(j) > 1$成立，则保证系统(2.8)存在一个周期正解$y_2$.

定理 2.2 假设(H_{22}) 和(H_{24}) 成立, 则方程(2.8)至少存在两个正解y_1 和y_2 并且

$$0 < \|y_1\| < q < \|y_2\|.$$

证明: 如果(H_{22}) 和(H_{24}) 成立. 利用(H_{22}) 的第一式

$$g^0+B\sum_{j=1}^{p}I^0(j)<1,$$

知, 对任意的$0<\epsilon<1$, 使得,

$$(1+\epsilon)[g^0+B\sum_{j=1}^{p}I^0(j)]<1$$

存在一个常数$0<r<q$ 使得

$$g(t,u)\le(1+\epsilon)a(t)g^0u,\quad I_j(u)\le(1+\epsilon)I^0(j)u,\ \text{其中}\ j=1,2,\cdots,p,\ \ 0\le u\le r.$$

因此, 如果$y\in K$ 和$\|y\|=r$, 则$\sigma r\le y(t)\le r$.

则对任意的$y\in K$ 和$\|y\|=r$, 有

$$\begin{aligned}
(\Phi y)(t) &= [\int_t^{t+\omega}G(t,s)\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,y(s+r))drds+\sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y_0(t_j))]\\
&\le \int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)g^0(1+\varepsilon)\int_{-\infty}^{0}K(r)y(s+r)drds+B\sum_{j=1}^{p}I_j(y(t_j))\\
&\le g^0(1+\varepsilon)\|y\|\int_t^{t+\omega}G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^{0}K(r)drds+B\sum_{j=1}^{p}I^0(j)(1+\varepsilon)\|y\|\\
&= [(1+\epsilon)[g^0+B\sum_{j=1}^{p}I^0(j)]\|y\|\\
&< \|y\|.
\end{aligned}$$

这说明对任意的$y\in K\cap\partial\Omega_1$, 其中$\Omega_1=\{u\in X:\|u\|<r\}$.

$$\|\Phi y\|\le\|y\| \tag{2.21}$$

另一方面, 由(H_{24})式, 知存在常数$q>0$ 使得$\sigma q\le u\le q$ 满足

$$\int_{-\infty}^{0}K(r)g(s,y(s+r))dr>a(s)\int_{-\infty}^{0}K(r)y(s+r)(1-A\sum_{j=1}^{p}I_{(q)}(j))dr,\quad s\in\mathbf{R},$$

$$I_j(u) \geq \sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j)u. \quad j = 1,2,\cdots,p.$$

因此, 若$y \in K$ 和$\|y\| = q$, 则$\sigma q \leq y(t) \leq q$.

对$\forall t \in R, \psi \equiv 1$, 只需证任意的$y \in K \cap \partial\Omega_2$ 和 $\lambda \geq 0$

$$y \neq \Phi y + \lambda\psi \tag{2.22}$$

其中$\Omega_2 = \{u \in X : \|u\| < q\}$.

若不然, 存在$y_0 \in K \cap \partial\Omega_2$ 和$\lambda_0 \geq 0$ 使得

$$y_0 = \Phi y_0 + \lambda_0\psi.$$

令$\mu = \min\limits_{t\in[0,\omega]} y_0(t)$. 则$\forall t \in R$ 有

$$\begin{aligned}
y_0(t) &= (\Phi y_0)(t) + \lambda_0 \\
&= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^{0} K(r)g(s,y_0(s+r))drds + \sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)} G(t,t_j)I_j(y_0(t_j)) + \lambda_0 \\
&> \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^{0} K(r)y_0(s+r)(1 - A\sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j))drds + A\sum_{j=1}^{p} I_j(y_0(t_j)) + \lambda_0 \\
&\geq \mu(1 - A\sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j))\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)ds + A\mu\sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j) + \lambda_0 \\
&= \mu + \lambda_0,
\end{aligned}$$

说明$\mu > \mu + \lambda_0$,矛盾. 由(2.21)和(2.22), 及定理1.7得Φ 有一个不动点$y_1 \in K \cap (\bar{\Omega}_2 \setminus \Omega_1)$. 这里$r < \|y_1\| < q$ 和$y_1(t) \geq \sigma r > 0$, 说明$y_1(t)$是(2.8)的ω-周期正解.

另一方面, 由(H_{22})的第二式,

$$g^{\infty} + B\sum_{j=1}^{p} I^{\infty}(j) < 1,$$

知对任意的$0 < \epsilon < 1$, 使得,

$$(1+\epsilon)[g^{\infty} + B\sum_{j=1}^{p} I^{\infty}(j)] < 1,$$

且存在一个常数$r_1 > q$, 对$\forall\ u \geq r_1$, 有

$$g(t,u) \leq (1+\epsilon)a(t)g^{\infty}u, \quad I_j(u) \leq (1+\epsilon)I^{\infty}(j)u.$$

令$R = \frac{r_1}{\sigma}$, 因此, 对$\forall\ u \in K \cap \partial\Omega_3$,

$$u(t) \geq \sigma\|u\| = \sigma R = r_1, \tag{2.23}$$

其中$\Omega_3 = \{u \in X : \|u\| < R\}$.

则对任意的$y \in K$ 和$\|y\| = R$, 知

$$\begin{aligned}
(\Phi y)(t) &= \int_t^{t+\omega} G(t,s)\int_{-\infty}^0 K(r)g(s,y(s+r))drds + \sum_{j:t_j\in[t,t+\omega)} G(t,t_j)I_j(y(t_j)) \\
&\leq \int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)g^{\infty}(1+\varepsilon)\int_{-\infty}^0 K(r)y(s+r)drds + B\sum_{j=1}^p I_j(y(t_j)) \\
&\leq g^{\infty}(1+\varepsilon)\|y\|\int_t^{t+\omega} G(t,s)a(s)\int_{-\infty}^0 K(r)drds + B(1+\varepsilon)\sum_{j=1}^p I^{\infty}(j)\|y\| \\
&= (1+\epsilon)[g^{\infty} + B\sum_{j=1}^p I^{\infty}(j)]\|y\| \\
&< \|y\|.
\end{aligned}$$

即对任意的$y \in K \cap \partial\Omega_3$

$$\|\Phi y\| \leq \|y\|. \tag{2.24}$$

因此, 由(2.22) 和(2.24)及定理1.5得, Φ 有一个不动点$y_2 \in K \cap (\bar{\Omega}_3 \setminus \Omega_2)$. 这里, $q < \|y_2\| < R$ 和$y_2(t) \geq \sigma q > 0$. 这说明$y_2(t)$ 是(2.8)的ω-周期正解. 证毕.

推论 2.7 如果用下面的(H_{22}^*)式来代替(H_{22})式, 则定理2.2的结论成立.

$$(H_{22}^*) \quad g^0 = 0, \ \sum_{j=1}^p I^0 = 0, \ g^{\infty} = 0, \ \sum_{j=1}^p I^{\infty} = 0.$$

证明: 与定理2.2的证明类似, 从略.

注2.4: 如果在定理2.2中我们只假设(H_{24}) 和$g^0 + B\sum_{j=1}^p I^0 < 1$成立, 则保证方程(2.8)存在一个周期正解$y_1$; 同理, 如果在定理2.2中我们只假设$(H_{24})$ 和$g^{\infty}+$

$B\sum_{j=1}^{p} I^{\infty} < 1$成立，则保证方程(2.8)存在一个周期正解$y_2$.

定理 2.3 如果下面条件之一成立,

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad g_0 + A\sum_{j=1}^{p} I_0 > 1 \quad 和 \quad g^{\infty} + B\sum_{j=1}^{p} I^{\infty} < 1;\\
&(ii) \quad g^0 + B\sum_{j=1}^{p} I^0 < 1 \quad 和 \quad g_{\infty} + A\sum_{j=1}^{p} I_{\infty} > 1.
\end{aligned}
$$

则系统(2.8)至少存在一个ω-周期正解.

证明: 与定理2.1, 定理2.2的证明类似, 从略.

推论 2.8 如果下面条件之一成立,

$$
\begin{aligned}
&(i) \quad g_0 = \infty \quad 或 \quad \sum_{j=1}^{p} I_0 = \infty \quad 和 \quad g^{\infty} = 0, \quad \sum_{j=1}^{p} I^{\infty} = 0; \quad (次线性)\\
&(ii) \quad g^0 = 0, \quad \sum_{j=1}^{p} I^0 = 0 \quad 和 \quad g_{\infty} = \infty \quad 或 \quad \sum_{j=1}^{p} I_{\infty} = \infty. \quad (超线性)
\end{aligned}
$$

则系统(2.8)至少存在一个ω-周期正解.

注2.5: 前面定理2.1和定理2.2的讨论对系统(2.25)也可以得到类似的结果.

$$
\begin{cases}
\dot{y}(t) = a(t)y(t) - \int_{-\infty}^{0} K(r)g(s, y(s+r))dr, \ t \neq t_j, \ j \in Z,\\
y(t_j^+) = y(t_j^-) - I_j(y(t_j)),
\end{cases} \tag{2.25}
$$

其中的参数满足假设条件$(A_{11})-(A_{12})-(A_{13})$.

2.1.2 应用举例

本节应用2.1.1节得到的主要结果, 分别根据定理2.1、定理2.2、定理2.3, 来研究一些特殊的时滞Lotka-Volterra 型的单种群增长的脉冲模型, 改进了已知的结果,并得到了一些新结果. 由于它们只是定理2.1、定理2.2、定理2.3的简单推论故大多只列结果而不加以证明.

为了讨论问题方便起见本节引入下面的记号:

$$
a^l = \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, \quad a^m = \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.
$$

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -a(t)y(t) + \int_{-\infty}^{0} K(r)\theta[y^a(s-r)+y^b(s-r)]dr, \ 0<a<1<b, \ t \neq t_j, \\ y(t_j^+) = y(t_j^-) + d_j e^{-c_j y(t_j)}, \quad j \in Z, \quad t = t_j, \end{cases} \tag{2.26}$$

其中$a(t) \in C(\mathbf{R},(0,\infty))$, $\theta > 0$, $d_j \geq 0$, $c_j > 0$, $a(t) = a(t+\omega)$, $\omega > 0$ 为常数. 且$K(r) \in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0} K(r)dr = 1$. 存在正整数$p$ 使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $d_{j+p} = d_j$, $c_{j+p} = c_j$, $j \in Z$.

推论 2.9 当

$$1 < \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x}{\theta(x^a+x^b)+Bpd^m e^{(-c^l\sigma x)}}$$

时, 则系统(2.26) 至少存在两个ω-周期正解. 其中σ, B见(2.17)式.

证明: 令$g(t,u) = \theta(u^a+u^b)$, 则

$$g_0 = \infty, g_\infty = \infty,$$

即(H_{21}^*) 成立. 设

$$T(x) := \frac{x}{\theta(x^a+x^b)+Bpd^m e^{(-c^l\sigma x)}}, \ x > 0,$$

则$T(0+) = 0, T(\infty) = 0$, 则存在一个整数$q > 0$ 使得

$$T(q) = \sup_{x\in(0,\infty)} T(x).$$

则当$\sigma q \leq u \leq q$时, 有

$$\begin{aligned} \frac{g(t,u)}{a(t)} + B\sum_{j=1}^{p} I^{(q)}(j) &\leq \theta(u^a+u^b) + B\max_{\sigma q\leq u\leq q}\sum_{j=1}^{p} d_j e^{-c_j u} \\ &\leq \theta(q^a+q^b) + Bpd^m \max_{\sigma q\leq u\leq q} e^{-c^l u} \\ &\leq \theta(q^a+q^b) + Bpd^m e^{-c^l\sigma q} \\ &< [\theta(q^a+q^b) + Bpd^m e^{-c^l\sigma q}]T(q) \\ &= q, \qquad t\in R, \end{aligned}$$

所以(H_{23}) 成立. 由定理2.1命题得证.

考虑有脉冲的造血模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= a(t)y(t) - b(t)\int_{-\infty}^{0} K(r)y^2(s-r)e^{-y(t-r)}dr, \ t \neq t_j, \ j \in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + c_j y^3(t_j)e^{-d_j y(t_j)}, \end{cases} \tag{2.27}$$

其中$a(t) \in C(R,(0,\infty))$, $b(t) \in C(R,(0,\infty))$, $c_j \geq 0$, $d_j > 0$, 和$a(t) = a(t+\omega)$, $b(t) = b(t+\omega)$, $\omega > 0$ 是一个常数; $K(r) \in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0} K(r)dr = 1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $c_{j+p} = c_j$, $d_{j+p} = d_j$ $j \in Z$.

推论 2.10 当

$$\max_{t\in[0,\omega]} \frac{a(t)}{b(t)} < \sup_{x\in(0,\infty)} \min_{u\in[\sigma x,x]} \{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^m u}}\},$$

时, 则系统(2.27) 至少存在两个ω-周期正解. 其中σ 见(2.17)式.

证明: 令

$$g(t,u) = b(t)u^2e^{-u}, \quad I_j(u) = c_j u^3 e^{-d_j u}.$$

则

$$g^0 = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^0 = 0, \ g^\infty = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^\infty = 0,$$

因此(H_{22}^*) 成立. 令

$$F(x) := \min_{u\in[\sigma x,x]} \{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^m u}}\}, \ x > 0.$$

则$F(0+) = 0, F(\infty) = 0$, 所以存在$q > 0$ 使得

$$F(q) = \sup_{x\in(0,\infty)} F(x).$$

则$\forall \sigma q \le u \le q$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{g(t,u)}{a(t)} + A\sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j) &= \frac{b(t)}{a(t)}u^2 e^{-u} + A\min_{\sigma q\le u\le q}\sum_{j=1}^{p} c_j u^3 e^{-d_j u} \\
&\ge \frac{b(t)}{a(t)}u^2 e^{-u} + Apc^l\sigma q \min_{\sigma q\le u\le q} u^2 e^{-d^m u} \\
&\ge [\frac{b(t)}{a(t)}ue^{-u} + Apc^l\sigma \min_{\sigma q\le u\le q} u^2 e^{-d^m u}]u \\
&\ge [\frac{b(t)}{a(t)} + Apc^l\sigma]\min_{\sigma q\le u\le q}\{ue^{-u},\ u^2e^{-d^m u}\}u \\
&= [\frac{b(t)}{a(t)} + Apc^l\sigma]F(q)u \\
&\ge \frac{b(t)}{a(t)}\sup_{x\in(0,\infty)}\min_{u\in[\sigma x,x]}\{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^m u}}\}u \\
&> \frac{b(t)}{a(t)}\max_{t\in[0,\omega]}\frac{a(t)}{b(t)}u \\
&\ge u, \qquad\qquad t\in R,
\end{aligned}$$

则(H_{24})成立. 由定理2.2命题得证.

推论 2.11 当$c_j \equiv 0$ 和$I_j \equiv 0$ 时, 以及

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{a(t)}{b(t)} < \sup_{x\in(0,\infty)}\min_{u\in[\sigma x,x]}\frac{u}{e^u},$$

则系统(2.27) 至少存在两个ω-周期正解.

注2.6: 为了本节后面讨论方便, 设

(H_{25}): $\sum_{j=1}^{p} I^{\infty} = 0,$

(H_{26}): $\sum_{j=1}^{p} I^{0} = 0.$

事实上有很多函数满足(H_{25}).例如: $I_j(u) = d_j u^5,\ d_j > 0,\ \ j\in Z.$

考虑有脉冲的红细胞再生模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -a(t)y(t) + b(t)\int_{-\infty}^{0} K(r)e^{-\beta(t)y(s+r)}dr, & t\ne t_j, \\ y(t_j^+) = y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \qquad j\in Z, & t = t_j, \end{cases} \tag{2.28}$$

其中$a(t),\ b(t)\in C(R,(0,\infty)),\ \beta(t)\in C(R,(0,\infty)),\ I_j\in C([0,\infty),[0,\infty)),\ a(t), b(t)$和$\beta(t)$

都是ω-周期函数, $\omega>0$ 是一个常数; $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0}K(r)dr=1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $c_{j+p}=c_j$, $d_{j+p}=d_j\ j\in Z$.

推论 2.12 若(H_{25}) 成立, 则系统(2.28) 至少存在一个ω-周期解.

考虑红细胞再生脉冲模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\frac{1}{1+y(s+r)^n}dr, & n>0,\quad t\neq t_j,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), & j\in Z,\quad t=t_j, \end{cases} \tag{2.29}$$

其中$a(t)$, $b(t)\in C(R,(0,\infty))$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $a(t),b(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega>0$ 是一个常数; $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0}K(r)dr=1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $c_{j+p}=c_j$, $d_{j+p}=d_j\ j\in Z$.

推论 2.13 若(H_{25}) 成立, 则系统(2.29) 至少存在一个ω-周期解.

考虑红细胞再生模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)\frac{y(s+r)}{1+y(s+r)^n}dr, & n>0,\quad t\neq t_j,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), & j\in Z,\quad t=t_j, \end{cases} \tag{2.30}$$

其中$a(t)$, $b(t)\in C(R,(0,\infty))$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $a(t),b(t)$都是ω-周期函数, $\omega>0$是一个常数; $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0}K(r)dr=1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $c_{j+p}=c_j$, $d_{j+p}=d_j\ j\in Z$.

推论 2.14 若 (H_{27}): $\forall\, t\in[0,\omega], b(t)>a(t)$
和(H_{25})成立, 则系统(2.30)至少存在一个ω-周期解.

考虑造血脉冲模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t)=-a(t)y(t)+b(t)\int_{-\infty}^{0}K(r)y(s+r)e^{-\beta(t)y(s+r)}dr, & t\neq t_j,\\ y(t_j^+)=y(t_j^-)+I_j(y(t_j)), & j\in Z,\quad t=t_j, \end{cases} \tag{2.31}$$

其中$a(t)$, $b(t)\in C(R,(0,\infty))$, $\beta(t)\in C(R,(0,\infty))$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $a(t),b(t)$和$\beta(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega>0$ 是一个常数; $K(r)\in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0}K(r)dr=1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $c_{j+p}=c_j$, $d_{j+p}=d_j\ j\in Z$.

推论 2.15 若(H_{25})和(H_{27})成立, 则系统(2.31) 至少存在一个ω-周期解.

推论2.12 和推论2.13显然. 推论2.14 和推论2.15, 因为

$$g_0 = \min_{t\in[0,\omega]} \frac{b(t)}{a(t)} > 1 \quad \text{and} \quad g^{\infty} = 0 < 1,$$

由定理2.3得证.

考虑经典的Logistic脉冲方程

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= a(t)y(t) - \int_{-\infty}^{0} K(r)\dfrac{y^2(s+r)}{K(t)}dr, \qquad t \neq t_j, \quad j \in Z, \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \qquad t = t_j, \end{cases} \tag{2.32}$$

其中$a(t)$, $K(t) \in C(R,(0,\infty))$, $I_j \in C([0,\infty),[0,\infty))$, $a(t),K(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega > 0$ 是一个常数; $K(r) \in C((-\infty,0],[0,\infty))$, $\int_{-\infty}^{0} K(r)dr = 1$. 存在正整数$p$使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $c_{j+p} = c_j$, $d_{j+p} = d_j$ $j \in Z$.

推论 2.16 若(H_{26})成立, 则系统(2.32) 至少存在一个ω-周期解.

2.2 具有有限时滞的一阶脉冲微分方程

本节主要讨论下面系统的周期解的存在性问题

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t) + g(t, y(t-\tau(t))), \quad t \neq t_j, \quad j \in Z, \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.33}$$

其中

(A_{11}) : $y(t_j^+)$ 和$y(t_j^-)$ 分别表示$y(t_j)$在$t = t_j$点的右极限和左极限, y 在t_j点是左连续的;

(A_{12}') : $a(t) \in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t) \in C(R,R)$, $g \in C(R \times [0,\infty),[0,\infty))$, $I_j \in C([0,\infty),[0,\infty))$, 和$a(t)$, $\tau(t)$, $g(t,y)$ 都是ω-周期函数. $\omega > 0$ 是常数;

(A_{13}) : 存在一个正整数p 使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $I_{j+p} = I_j$, $j \in Z$. 不失一般性, 我们假设$[0,\omega) \cap \{t_j : j \in Z\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_p\}$.

本节主要利用锥不动点定理(参见定理1.5-1.7)对系统(2.33)得到单个和多个周期解的存在性问题. 证明思路与2.1节类似, 故大多只列结果不加以证明.

2.2.1 周期解的存在性

由引理2.2, 我们很容易得到下面的引理2.17.

引理 2.17 若$y(t)$ 是方程(2.33)的ω-周期解等价于$y(t)$ 是下面的积分微分方程的ω-周期解:

$$y(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))ds+\sum_{j:\ t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)), \tag{2.34}$$

其中$G(t,s)$ 同引理2.2的(2.11)定义相同.

定义

$$PC(R)=\{y:R\to R\mid y|_{(t_j,t_{j+1})}\in C(t_j,t_{j+1}),\ \exists y(t_j^-)=y(t_j),\ y(t_j^+),\ j\in Z\}.$$

令

$$X=\{y(t):y(t)\in PC(R),y(t+\omega)=y(t)\}$$

定义

$$\|y\|=\sup_{t\in[0,\omega]}\{|y(t)|:y\in X\}.$$

对任意的$y\in X$, 定义下面的算子:

$$(\Phi y)(t)=\int_t^{t+\omega}G(t,s)g(s,y(s-\tau(s)))ds+\sum_{j:\ t_j\in[t,t+\omega)}G(t,t_j)I_j(y(t_j)), \tag{2.35}$$

显然, Φ 是X上的全连续算子. 令

$$K=\{y\in X:y(t)\geq 0\quad 和\quad y(t)\geq\sigma\|y\|\},$$

其中

$$0<\sigma=A/B<1, \tag{2.36}$$

和

$$\begin{cases} A := \min\{G(t,s): 0 \le t \le s \le \omega\} = \dfrac{1}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi} - 1} > 0, \\ B := \max\{G(t,s): 0 \le t \le s \le \omega\} = \dfrac{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi}}{e^{\int_0^\omega a(\xi)d\xi} - 1} > 0. \end{cases} \tag{2.37}$$

不难证明K是X中的一个锥.

引理 2.18 $\Phi(K) \subset K$.

对于求方程(2.33)的ω-周期解等价于求算子Φ不动点.

定理 2.4 假设(H_{21})和(H_{23})成立，则方程(2.33)至少存在两个正解y_1和y_2并且

$$0 < \|y_1\| < q < \|y_2\|.$$

推论 2.19 如果用下面的(H_{21}^*)式来代替(H_{21})式，则定理2.4的结论成立.

$$(H_{21}^*) \quad g_0 = \infty \text{ 或 } \sum_{j=1}^{p} I_0 = \infty, \qquad g_\infty = \infty \text{ 或 } \sum_{j=1}^{p} I_\infty = \infty.$$

注2.6: 如果在定理2.4中我们只假设(H_{23})和$g_0 + A\sum_{j=1}^{p} I_0 > 1$成立，则保证方程(2.33)存在一个周期正解$y_1$; 同理，如果在定理2.4中我们只假设$(H_{23})$和$g_\infty + A\sum_{j=1}^{p} I_\infty > 1$成立，则保证方程(2.33)存在一个周期正解$y_2$.

定理 2.5 假设(H_{22})和(H_{24})成立，则方程(2.33)至少存在两个正解y_1和y_2并且

$$0 < \|y_1\| < q < \|y_2\|.$$

推论 2.20 如果用下面的(H_{22}^*)式来代替(H_{22})式，则定理2.5的结论成立.

$$(H_{22}^*) \quad g^0 = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^0 = 0, \ g^\infty = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^\infty = 0.$$

注2.7: 如果在定理2.5中我们只假设(H_{24})和$g^0 + BI^0 < 1$成立，则保证方程(2.33)存在一个周期正解y_1; 同理，如果在定理2.5中我们只假设(H_{24})和$g^\infty + BI^\infty < 1$成立，则保证方程(2.33)存在一个周期正解y_2.

定理 2.6 如果下面条件之一成立,

$$(i)\quad g_0+A\sum_{j=1}^{p}I_0>1 \quad 和 \quad g^{\infty}+B\sum_{j=1}^{p}I^{\infty}<1;$$
$$(ii)\quad g^0+B\sum_{j=1}^{p}I^0<1 \quad 和 \quad g_{\infty}+A\sum_{j=1}^{p}I_{\infty}>1.$$

则方程(2.33)至少存在一个ω-周期正解.

推论 2.21 如果下面条件之一成立,

$$(i)\quad g_0=\infty \quad 或 \quad \sum_{j=1}^{p}I_0=\infty \quad 和 \quad g^{\infty}=0, \quad \sum_{j=1}^{p}I^{\infty}=0; \quad (次线性)$$
$$(ii)\quad g^0=0, \quad \sum_{j=1}^{p}I^0=0 \quad 和 \quad g_{\infty}=\infty \quad 或 \quad \sum_{j=1}^{p}I_{\infty}=\infty. \quad (超线性)$$

则方程(2.33)至少存在一个ω-周期正解.

注2.8: 前面定理2.4和定理2.5的讨论对系统(2.38)也可以得到类似的结果.

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= a(t)y(t)-g(,y(t-\tau(t))),\ t\neq t_j,\ j\in Z, \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-)-I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.38}$$

其中的参数满足假设条件$(A_{11})-(A'_{12})-(A_{13})$.

2.2.2 应用举例

本节应用2.2.2节得到的主要结果, 分别根据定理2.4、定理2.5、定理2.6, 来研究一些特殊的具有有限时滞的单种群增长的脉冲模型, 改进了已知的结果,并得到了一些新结果.

考虑系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)[y(t)-\delta y^{\alpha}(t-\tau(t))-\delta y^{\beta}(t-\tau(t))],\ t\neq t_j,\ j\in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-)+b_je^{-c_jy(t_j)}, \end{cases} \tag{2.39}$$

其中$a(t)\in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t)\in C(R,R)$, $\delta>0$, $0<\alpha<1<\beta$, $b_j\geq 0$, $c_j>0$, 和$a(t)=a(t+\omega)$, $\tau(t)=\tau(t+\omega)$, $\omega>0$ 是一个常数; 存在正整数p 使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $b_{j+p}=b_j$, $c_{j+p}=c_j$, $j\in Z$.

推论 2.22 当

$$1 < \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x}{\delta(x^\alpha + x^\beta) + Bpb^m e^{-c^l\sigma x}},$$

时, 则系统(2.39) 至少存在两个ω-周期正解. 其中σ 见(2.36)式和B 见(2.37)式.

证明: 令

$$g(t,u) = \delta a(t)(u^\alpha + u^\beta), \quad I_j(u) = b_j e^{-c_j u}.$$

则

$$g_0 = \infty \qquad g_\infty = \infty,$$

因此(H_{21}^*)成立. 令

$$F(x) := \frac{x}{\delta(x^\alpha + x^\beta) + Bpb^m e^{-c^l\sigma x}}, \ \ x > 0.$$

则$F(0+) = 0, F(\infty) = 0$, 所以存在一个$q > 0$ 使得

$$F(q) = \sup_{x\in(0,\infty)} F(x).$$

则$\forall \sigma q \leq u \leq q$, 有

$$\begin{aligned}
\frac{g(t,u)}{a(t)} + B\sum_{j=1}^{p} I^{(q)}(j) &= \delta(u^\alpha + u^\beta) + B\max_{\sigma q\leq u\leq q}\sum_{j=1}^{p} b_j e^{-c_j u} \\
&\leq \delta(q^\alpha + q^\beta) + Bpb^m \max_{\sigma q\leq u\leq q} e^{-c^l u} \\
&\leq \delta(q^\alpha + q^\beta) + Bpb^m e^{-c^l\sigma q} \\
&< [\delta(q^\alpha + q^\beta) + Bpb^m e^{-c^l\sigma q}]F(q) \\
&= q, \qquad\qquad t\in R,
\end{aligned}$$

因此(H_{23})成立. 由定理2.4命题得证.

推论 2.23 当$b_j \equiv 0, I_j \equiv 0\ (j\in Z)$时, 及

$$\delta < \sup_{x\in(0,\infty)} \frac{x}{x^\alpha + x^\beta}.$$

则系统(2.39) 至少存在两个ω-周期正解.

考虑造血模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= y(t)[a(t) - b(t)y(t)e^{-y(t)}], \quad t \neq t_j, \quad j \in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + c_j y^3(t_j) e^{-d_j y(t_j)}, \end{cases} \tag{2.40}$$

其中$a(t) \in C(R,(0,\infty))$, $b(t) \in C(R,(0,\infty))$, $c_j \geq 0$, $d_j > 0$, 和$a(t) = a(t+\omega)$, $b(t) = b(t+\omega)$, $\omega > 0$ 是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $c_{j+p} = c_j$, $d_{j+p} = d_j$ $j \in Z$.

推论 2.24 当

$$\max_{t\in[0,\omega]} \frac{a(t)}{b(t)} < \sup_{x\in(0,\infty)} \min_{u\in[\sigma x,x]} \{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^m u}}\},$$

时, 则系统(2.40) 至少存在两个ω-周期正解. 其中σ 见(2.36)式.

证明: 令

$$g(t,u) = b(t)u^2 e^{-u}, \quad I_j(u) = c_j u^3 e^{-d_j u}.$$

则

$$g^0 = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^0 = 0, \ g^\infty = 0, \ \sum_{j=1}^{p} I^\infty = 0,$$

因此(H_{22}^*) 成立. 令

$$F(x) := \min_{u\in[\sigma x,x]} \{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^m u}}\}, \quad x > 0.$$

则$F(0+) = 0, F(\infty) = 0$, 所以存在$q > 0$ 使得

$$F(q) = \sup_{x\in(0,\infty)} F(x).$$

则$\forall \sigma q \leq u \leq q$, 有

$$\begin{aligned} \frac{g(t,u)}{a(t)} + A\sum_{j=1}^{p} I_{(q)}(j) &= \frac{b(t)}{a(t)} u^2 e^{-u} + A \min_{\sigma q\leq u\leq q} \sum_{j=1}^{p} c_j u^3 e^{-d_j u} \\ &\geq \frac{b(t)}{a(t)} u^2 e^{-u} + Apc^l \sigma q \min_{\sigma q\leq u\leq q} u^2 e^{-d^m u} \\ &\geq [\frac{b(t)}{a(t)} u e^{-u} + Apc^l \sigma \min_{\sigma q\leq u\leq q} u^2 e^{-d^m u}] u \\ &\geq [\frac{b(t)}{a(t)} + Apc^l \sigma] \min_{\sigma q\leq u\leq q} \{ue^{-u}, u^2 e^{-d^m u}\} u \\ &= [\frac{b(t)}{a(t)} + Apc^l \sigma] F(q) u \end{aligned}$$

$$\geq \frac{b(t)}{a(t)} \sup_{x\in(0,\infty)} \min_{u\in[\sigma x,x]} \{\frac{u}{e^u}, \frac{u^2}{e^{d^{m}u}}\} u$$

$$> \frac{b(t)}{a(t)} \max_{t\in[0,\omega]} \frac{a(t)}{b(t)} u$$

$$\geq u, \qquad\qquad t\in R,$$

则(H_{24})成立. 由定理2.5命题得证.

推论 2.25 当$c_j \equiv 0$ 和$I_j \equiv 0$ 时, 以及

$$\max_{t\in[0,T]} \frac{a(t)}{b(t)} < \sup_{x\in(0,\infty)} \min_{u\in[\sigma x,x]} \frac{u}{e^u},$$

则系统(2.40) 至少存在两个ω-周期正解.

考虑单种群增长的脉冲造血模型:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t) + b(t)e^{-\beta(t)y(t-\tau(t))}, \quad t\neq t_j, \quad j\in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.41}$$

其中$a(t)$, $b(t)\in C(R,(0,\infty))$, $\beta(t)\in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t)\in C(R,R)$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $j\in Z$, $a(t)$, $b(t)$, $\beta(t)$ 和$\tau(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega>0$是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $I_{j+p}=I_j$, $j\in Z$.

推论 2.26 若(H_{25}) 成立, 则系统(2.41) 至少存在一个ω-周期解.

考虑单种群增长的红细胞再生脉冲模型:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t) + b(t)\dfrac{1}{1+y(t-\tau(t))^n}, \quad n>0, \quad t\neq t_j, \quad j\in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.42}$$

其中$a(t)$, $b(t)\in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t)\in C(R,R)$, $I_j\in C([0,\infty),[0,\infty))$, $j\in Z$, 和$a(t)$, $b(t)$, $\tau(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega>0$是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p}=t_j+\omega$, $I_{j+p}=I_j$, $j\in Z$.

推论 2.27 若(H_{25}) 成立, 则系统(2.42) 至少存在一个ω-周期解.

考虑单种群增长的红细胞再生脉冲模型:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t) + b(t)\dfrac{y(t-\tau(t))}{1+y(t-\tau(t))^n}, \ n>0, \ t \neq t_j, \ j \in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.43}$$

其中$a(t)$, $b(t) \in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t) \in C(R,R)$, $I_j \in C([0,\infty),[0,\infty))$, $j \in Z$, 和$a(t)$, $b(t)$, $\tau(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega > 0$是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $I_{j+p} = I_j$, $j \in Z$.

推论 2.28 若(H_{25})和(H_{27})成立, 则系统(2.43) 至少存在一个ω-周期解.

考虑有脉冲的绿豆蝇模型

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= -a(t)y(t) + b(t)y(t-\tau(t))e^{-\beta(t)y(t-\tau(t))}, \ t \neq t_j, \ j \in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) + I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.44}$$

其中$a(t)$, $b(t) \in C(R,(0,\infty))$, $\beta(t) \in C(R,(0,\infty))$, $\tau(t) \in C(R,R)$, $I_j \in C([0,\infty),[0,\infty))$, $j \in Z$, $a(t)$, $b(t)$, $\beta(t)$ 和$\tau(t)$ 都是ω-周期函数, $\omega > 0$是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $I_{j+p} = I_j$, $j \in Z$.

推论 2.29 若(H_{25})和(H_{27})成立, 则系统(2.44) 至少存在一个ω-周期解.

考虑脉冲Logistic 系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) &= a(t)y(t)[1 - \dfrac{y(t)}{K(t)}], \ t \neq t_j, \ j \in Z \\ y(t_j^+) &= y(t_j^-) - I_j(y(t_j)), \end{cases} \tag{2.45}$$

其中$a(t)$, $K(t) \in C(R,(0,\infty))$, $I_j \in C([0,\infty),[0,\infty))$, $j \in Z$, 和$a(t)$, $K(t)$都是ω-周期函数, $\omega > 0$是一个常数; 存在正整数p使得$t_{j+p} = t_j + \omega$, $I_{j+p} = I_j$, $j \in Z$.

推论 2.30 若(H_{26})成立, 则系统(2.45) 至少存在一个ω-周期解.

第三章　二阶脉冲微分方程

第二章中我们利用锥不动点定理证明了一阶脉冲微分方程周期解的存在性. 众所周知, 对于二阶脉冲微分方程的解的存在性问题要复杂得多. 本章中我们考虑了二阶脉冲微分方程的周期解的存在性问题, 给出存在周期解的条件并列举一些具体的实例说明定理的正确性. 特别地, 具体讨论了有脉冲的奇异二阶微分方程的周期解存在性.

近几年, 对于具有脉冲的二阶微分方程周期解的存在性的问题的讨论有一些不错的方法.

文[57]利用上下解理论讨论了方程

$$\begin{cases} -x''+Mx=g(t), & t\neq t_k, \\ \Delta x|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p, \\ \Delta x'|_{t=t_k}=\bar{I}_k(x(t_k)), \\ x(0)=x(T),\ \ x'(0)=x'(T). \end{cases} \tag{T}$$

的周期解的存在性.

文[39]利用Leggett-Williams不动点定理得到脉冲系统(T)存在三个解的充分条件.

然而当参数M为关于t的函数时, 利用锥不动点定理来讨论它的解的存在性问题则很少见.

最近文[75]得到奇异二阶微分方程周期边值问题

$$\begin{cases} x''+a(t)x=f(t,x), \\ x(0)=x(T),\ \ x'(0)=x'(T). \end{cases}$$

存在周期正解的充分条件.

本章则主要利用Leray-Schauder抉择定理及锥不动点定理分两部分来讨论二阶脉冲微分方程周期边值问题的周期解的存在性.

3.1 二阶脉冲微分方程周期解

3.1.1 周期解的存在性

本节主要利用锥不动点定理来讨论下面二阶脉冲微分方程的周期解的存在性问题.

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = f(t,x), & t \neq t_k, \quad t \in J, \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots,p, \\ x(0) = x(T), \ x'(0) = x'(T). \end{cases} \tag{3.1}$$

这里, $J = [0,T]$, 给定$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_p < T$. $I_k \in C(J,R)$. $\Delta x'|_{t=t_k} = x'(t_k^+) - x'(t_k^-)$, 其中$x'(t_k^+)$ 和$x'(t_k^-)$ 分别表示$x'(t)$ 在$t = t_k$ 点的右极限和左极限.

f是关于t的$T-$周期函数并且在$[0,T]\times\mathbf{R}$上满足Carathéodory条件:

(i) 对一切的$x \in \mathbf{R}$, 函数$f(.,x)$在$[0,T]$上是可测的;

(ii) 对几乎所有的$t \in [0,T]$, $f(t,.)$在$\mathbf{R}$上是连续的;

(iii) 对一切的紧集$K \subset \mathbf{R}$, 存在$h_k \in L^1[0,T]$, 对所有的$x \in K$ 和几乎所有的$t \in [0,T]$ 使得$|f(t,x)| \leq h_k(t)$.

为了方便起见我们引入下面的记号:

如果$f:[0,T]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 满足Carathéodory 条件, 我们记为$f \in Car([0,T]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$. 用$\|.\|_p$来表示$L^p-$范数; 用$\|.\|$来表示通常的上确界范数.并且记

$$f^m = \max\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}, \quad f^l = \min\{f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots\}.$$

我们首先来考虑下面的周期边值问题

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = 0, \\ x(0) = x(T), x'(0) = x'(T). \end{cases} \tag{3.2}$$

则下面问题

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = h(t), \\ x(0) = x(T), x'(0) = x'(T), \end{cases} \tag{3.3}$$

的唯一解可以表示为

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds,$$

其中$G(t,s)$ 是(3.2)的格林函数并且$\int_0^T G(t,s)a(s)ds = 1$. 下面的结果可以直接从文献[67] 得到.

引理 3.1 如果对几乎所有的$t \in [0,T]$, $a \le 0$, 则对所有的$(t,s) \in [0,T] \times [0,T]$, $G(t,s) < 0$.

相反如果对几乎所有的$t \in [0,T]$, $a \ge 0$, 则将用到下面的Sobolev 常数

$$K(q) = \begin{cases} \frac{2\pi}{qT^{1+2/q}}\left(\frac{2}{2+q}\right)^{1-2/q}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{q})}\right)^2 & \text{if } 1 \le q < \infty, \\ \frac{4}{T} & \text{if } q = \infty, \end{cases} \tag{3.4}$$

其中Γ 是Gamma函数. 对任意给定的p,定义

$$p^* = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{if } 1 \le q < \infty, \\ 1 & \text{if } q = \infty. \end{cases}$$

引理 3.2 [67] 当$1 \le p \le \infty$ 时, $a(t) > 0$ 且$a \in L^p[0,1]$. 如果

$$\|a\|_p < K(2p^*), \tag{3.5}$$

则对所有的$(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$, $G(t,s) > 0$.

注: 如果$p = \infty$, 则(3.5)式等价于$\|a\|_\infty < (\frac{\pi}{T})^2$.

下面我们定义

$$\Lambda^- = \{a \in L^1(0,T): \text{对几乎所有的 } t \in [0,T],\ a \le 0\},$$

$$\Lambda^+ = \{a \in L^1(0,T): \text{对几乎所有的 } t \in [0,T],\ a \ge 0,, 1 \le p \le \infty, \|a\|_p < K(2p^*)\}.$$

显然当$a \in \Lambda^+ \cup \Lambda^-$时, 则(3.2)的格林函数$G(t,s)$ 有确定的符号, 并且如果令

$$M = \max_{0 \le s,t \le T} G(t,s) \quad 和 \quad m = \min_{0 \le s,t \le T} G(t,s),$$

则当$a \in \Lambda^+$时, $M > m > 0$; 当$a \in \Lambda^-$时, $m < M < 0$.

注: 由文献[67], 当$a(t)=k^2<(\frac{\pi}{T})^2$时, 可以计算格林函数的最大值和最小值

$$M=\frac{1}{2k\sin(\frac{kT}{2})},\quad m=\frac{1}{2k}\cot(\frac{kT}{2}). \tag{3.6}$$

为了定义(3.1)的解, 我们定义

$J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$,

$$X=PC'(J,R)=\{x:J\to R|x\in C(J,R);\ x'|_{(t_k,t_{k+1})}\in C(t_k,t_{k+1}),\ \ x'(t_k^-)=x'(t_k),\ \exists\, x'(t_k^+)\}.$$

则$X=PC'(J,R)$ 及范数

$$\|x\|_{PC'}=\max\{\|x\|_C,\|x'\|_{PC}\}$$

其中

$$\|x\|_C=\sup_{t\in J}|x(t)|,\quad \|x'\|_{PC}=\sup_{t\in J}|x'(t)|$$

构成一个Banach 空间.

引理 3.3 如果x 是方程

$$x(t)=\int_0^T G(t,s)h(s)ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k(x(t_k)) \tag{3.7}$$

的解, 其中$G(t,s)$ 是方程(3.2)的格林函数. 则x 是下面脉冲问题的解

$$\begin{cases} x''+a(t)x=h(t), & t\in J', \\ \Delta x'|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p, \\ x(0)=x(T),\ \ x'(0)=x'(T). \end{cases} \tag{3.8}$$

证明: 假设x 是(3.7)的解, 则我们证明x 是(3.8) 的解.

首先, 令$t\in[0,T]\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$, 则

$$x'(t)=\{\int_0^T G(t,s)h(s)ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k(x(t_k))\}'$$

$$= \int_0^T G_t'(t,s)h(s)ds + \sum_{k=1}^{p} G_t'(t,t_k)I_k(x(t_k)),$$

和

$$x''(t) = \{\int_0^T G_t'(t,s)h(s)ds + \sum_{k=1}^{p} G_t'(t,t_k)I_k(x(t_k))\}'$$

$$= h(t) + \int_0^T G_{tt}''(t,s)h(s)ds + \sum_{k=1}^{p} G_{tt}''(t,t_k)I_k(x(t_k))$$

$$= h(t) - a(t)\{\int_0^T G(t,s)h(s)ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k))\}$$

$$= h(t) - a(t)x(t).$$

显然

$$\Delta x'|_{t=t_k} = x'(t_k^+) - x'(t_k^-) = \sum_{k=1}^{p} G_t'(t_k^+,t_k)I_k(x(t_k)) - \sum_{k=1}^{p} G_t'(t_k^-,t_k)I_k(x(t_k)) = I_k(x(t_k)).$$

对任意的$s_0 \in (0,T)$, $G(t,s_0)$ 为关于t的函数并且是(3.2)的解，并且在区间$[0,s_0)$和$(s_0,T]$上，有

$$G(0,s_0) = G(T,s_0) \text{ 和 } G_t'(0,s_0) = G_t'(T,s_0).$$

则

$$x(0) = x(T) \text{ 和 } x'(0) = x'(T).$$

□

现在我们来考虑下面的周期边值问题:

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = f(t,x), & t \in J', \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots,p. \\ x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T); \end{cases} \tag{3.9}$$

其中$f \in Car([0,T] \times \mathbf{R}, \mathbf{R})$ 且对所有的$x \in \mathbf{R}^+$ 和几乎所有的$t \in [0,T]$, $a(t)f(t,x) \geq 0$, $a(t)I_k(x) \geq 0$.

下面我们来证明(3.9)存在正的周期解.

定理 3.1 假设对所有的$x\in[\frac{m}{M}r,R]$, $0<r<R$, 和几乎所有的$t\in[0,T]$, 都有$a\in\Lambda^+$, $f(t,x)\geq 0$, $I_k(x)\geq 0$, 并且有下面条件之一成立

(i)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\geq 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}r,r],\ \ a.\,e.\,t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\leq 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}R,R],\ \ a.\,e.\,t\in[0,T];$$

(ii)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\leq 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}r,r],\ \ a.\,e.\,t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\geq 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}R,R],\ \ a.\,e.\,t\in[0,T].$$

则(3.9)至少存在一个周期解.

证明: 由$a\in\Lambda^+$知, $M>m>0$, 定义集合

$$\Omega_r=\{x\in PC'[J,R]:\|x\|<r\},$$

$$\Omega_R=\{x\in PC'[J,R]:\|x\|<R\}.$$

令

$$K=\{x\in PC'[J,R]:\ x(t)\geq 0,\ \min_{0\leq t\leq T}x(t)\geq\frac{m}{M}\|x\|\},\tag{3.10}$$

容易证明K 是$PC'[J,R]$中的一个锥.

在K 上定义算子如下

$$(\Phi x)(t)=\int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k(x(t_k)).$$

显然, $\Phi:K\to PC'[J,R]$ 全连续且$\Phi(K)\subset K$.

事实上, 对任意的$x\in K$,有

$$\|\Phi x\|\leq M[\int_0^T f(s,x(s))ds+\sum_{k=1}^{p}I_k(x(t_k))]$$

和

$$(\Phi x)(t) \geq m[\int_0^T f(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} I_k(x(t_k))].$$

所以我们有

$$(\Phi x)(t) \geq \frac{m}{M}\|\Phi x\|, \ \Phi x \in K. \text{ 所以, } \Phi(K) \subset K.$$

首先, 我们假设条件(i) 成立.

由第一个不等式知, 存在常数c_1, 使得对$\forall\ x \in [\frac{m}{M}r, r]$, $a.\,e.\ t \in [0,T]$

$$f(t,x) \geq c_1 a(t)x, \ \ m\sum_{k=1}^{p} I_k(x) \geq (1-c_1)x.$$

令$\psi \equiv 1$, 则$\psi \in K$. 下面证明对任意的$x \in K \cap \partial\Omega_r$ 和$\lambda > 0$,有

$$x \neq \Phi x + \lambda\psi \tag{3.11}$$

若不然, 存在$x_0 \in K \cap \partial\Omega_r$ 和$\lambda_0 > 0$ 使得$x_0 = \Phi x_0 + \lambda_0\psi$.

因为$x_0 \in K \cap \partial\Omega_r$, 所以$x_0(t) \geq \frac{m}{M}\|x_0\| = \frac{m}{M}r$. 令$\mu = \min\limits_{0 \leq t \leq T} x_0(t)$, 则对任意的$0 \leq t \leq T$, 知

$$\begin{aligned} x_0(t) &= (\Phi x_0)(t) + \lambda_0 \\ &= \int_0^T G(t,s)f(s,x_0(s))ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)) + \lambda_0 \\ &\geq \int_0^T c_1 G(t,s)a(s)x_0(s)ds + m\sum_{k=1}^{p} I_k(x(t_k)) + \lambda_0 \\ &\geq c_1\mu\int_0^T G(t,s)a(s)ds + (1-c_1)\mu + \lambda_0 \\ &= \mu + \lambda_0. \end{aligned}$$

所以$\mu \geq \mu + \lambda_0$,矛盾. 所以(3.11)成立.

另一方面, 利用第二个不等式, 存在常数c_2, 使得

$$f(t,x) \leq c_2 a(t)x, \ \ M\sum_{k=1}^{p} I_k(x) \leq (1-c_2)x, \ \ \forall\ x \in [\frac{m}{M}R, R], \ a.\,e.\ t \in [0,T].$$

下面证明当$x \in K \cap \partial\Omega_R$时,

$$\|\Phi x\| \leq \|x\| \tag{3.12}$$

事实上, 对任意的$x\in K\cap\partial\Omega_R$, $t\in[0,T]$,

$$
\begin{aligned}
(\Phi x)(t) &= \int_0^T G(t,s)f(s,x(s))ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k(x(t_k)) \\
&\le \int_0^T c_2G(t,s)a(s)x(s)ds+M\sum_{k=1}^{p}I_k(x(t_k)) \\
&\le \max_{0\le t\le T}x(t)[c_2\int_0^T G(t,s)a(s)ds+(1-c_2)] \\
&= \|x\|.
\end{aligned}
$$

所以, $\|\Phi x\|\le\|x\|$.

由(3.11)和(3.12)及锥不动点定理1.7知, Φ有一个不动点$x\in K\cap(\bar{\Omega}_R\setminus\Omega_r)$. 显然这个不动点是(3.9)的一个正解并且满足$r\le\|x\|\le R$.

用同样的办法可以证明当条件(ii)成立时, 也有同样的结论. □

由定理3.1可以得到下面的多个解的存在性定理3.2.

定理 3.2 如果存在$a\in\Lambda^+$ 和$0<r<q<R$ 使得

$$f(t,x)\ge 0 \text{ 和 } I_k(x)\ge 0,\ \forall\, x\in[\frac{m}{M}r,R],\ a.\,e.\ t\in[0,T].$$

且当下面两个条件之一成立时,

(i)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}r,r],\ a.\,e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}< 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}q,q],\ a.\,e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}R,R],\ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

(ii)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}r,r],\ a.\,e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}> 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}q,q],\ a.\,e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}R,R],\ \ a.e.\ t\in[0,T].$$

则(3.9) 至少存在两个正解x_1, x_2并且$r\le\|x_1\|<q<\|x_2\|\le R$.

证明: Ω_r, Ω_R, K 和Φ 的定义与定理3.1中的定义相同. 定义

$$\Omega_p=\{x\in PC'[J,R]:\|x\|<p\}.$$

与定理3.1的证明完全类似证明可以得到,

对$\forall\, x\in K\cap\partial\Omega_r$ 和 $\lambda>0$,

$$x\ne\Phi x+\lambda\psi; \tag{3.13}$$

对$\forall\, x\in K\cap\partial\Omega_R$ 和 $\lambda>0$,

$$x\ne\Phi x+\lambda\psi; \tag{3.14}$$

对$\forall\, x\in K\cap\partial\Omega_q$,

$$\|\Phi x\|<\|x\|. \tag{3.15}$$

则分别根据定理1.7和定理1.8得到两个正解x_1 和x_2且$r\le\|x_1\|<q<\|x_2\|\le R$.

□

由前面格林函数的符号的讨论和定理3.1和定理3.2的证明类似可以得到下面的定理3.3和定理3.4.

定理 3.3 如果存在$a\in\Lambda^-$ 和$0<r<R$ 使得

$$f(t,x)\le 0 \text{ 和 } I_k(x)\le 0,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,R],\ a.e.\ t\in[0,T].$$

且当下面两个条件之一成立时,

(i)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,r],\ \ a.e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}R,R],\ \ a.e.\ t\in[0,T];$$

(ii)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,r],\ \ a.e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}R,R],\ \ a.e.\ t\in[0,T].$$

则(3.9) 至少存在一个正解.

证明: 证明方法与定理3.1类似, 并且当$a(t)\in\Lambda^-$时$m<M<0$. 令

$$K=\{x\in PC'[J,R]:\ x(t)\ge 0,\ \min_{0\le t\le T}x(t)\ge\frac{M}{m}\|x\|\},\tag{3.16}$$

容易证明K 是$PC'[J,R]$ 中的一个锥. □

Ω_r, Ω_R, K 和Φ 的定义与定理3.1中的定义相同, 所以连续性的证明也类似, 证明从略. □

定理 3.4 如果存在$a\in\Lambda^-$ 和$0<r<q<R$ 使得

$$f(t,x)\le 0 \text{ 和 } I_k(x)\le 0,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,R],\ a.e.\ t\in[0,T].$$

且当下面两个条件之一成立时,

(i)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,r],\ \ a.e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}< 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}q,q],\ \ a.e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}R,R],\ \ a.e.\ t\in[0,T];$$

(ii)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}r,r],\ \ a.e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}> 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}q,q],\ \ a.e.\ t\in[0,T],$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{M}{m}R,R],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T].$$

(3.9) 至少存在两个正解x_1, x_2并且$r\le\|x_1\|<q<\|x_2\|\le R$.

证明: 证明过程与定理3.2类似. □

事实上, 如果$f(t,x)$和$I_k(x)$满足一定的条件, 我们可以证明问题(3.9) 存在n个解.

定理 3.5 如果存在$a\in\Lambda^+$ 和$0<a_i<b_i\ (1\le i\le n)$ 使得

$$f(t,x)\ge 0 \text{ 和 } I_k(x)\ge 0,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}a_i,b_i],\ a.\,e.\ t\in[0,T],\ 1\le i\le n.$$

且当下面两个条件之一成立时, (i)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}a_i,a_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}b_i,b_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

(ii)

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}a_i,a_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\ge 1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}b_i,b_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T].$$

则(3.9) 至少存在n个解$x_i\ (1\le i\le n)$ 并且$a_i\le\|x_i\|\le b_i,\ 1\le i\le n$.

注: 定理3.5中如果条件(i) 和(ii)由下面条件代替

(i)*

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}a_i,a_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}b_i,b_i],\ \ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

(ii)*

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}a_i,a_i],\ a.\,e.\ t\in[0,T]$$

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\quad \forall\, x\in[\frac{m}{M}b_i,b_i],\ a.\,e.\ t\in[0,T].$$

则(3.9) 至少存在$2n-1$个正解.

3.1.2 应用

本节我们将应用3.1.1中的主要结论来证明一些具体的实例. 为此本节将分为两部分来讨论.

(一) 非线性性

假设$f\in Car([0,T]\times\mathbf{R},\mathbf{R})$. 我们主要讨论下面的二阶脉冲微分方程周期边值问题的周期解的存在性

$$\begin{cases} x''+a(t)x=f(t,x), & t\in J',\\ \Delta x'|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p.\\ x(0)=x(T),\ x'(0)=x'(T); \end{cases}\tag{3.17}$$

其中$a\in\Lambda^+\cup\Lambda^-$.

定理 3.6 如果对所有的$x\in\mathbf{R}^+$和几乎所有的$t\in[0,T]$,并且$a\in\Lambda^+$, $f(t,x)\geq 0$, $I_k(x)\geq 0$, 这里$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$. 当下面条件之一成立时:

即对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$(i)\ \lim_{x\to0^+}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1;$$

$$(ii)\ \lim_{x\to0^+}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1;$$

一致成立, 则(3.17)至少存在一个正解.

证明: 分别令r足够的小和R充分大, 则根据定理3.1可以证明结论成立. □

推论 3.4 如果对所有的$x\in\mathbf{R}^+$和几乎所有的$t\in[0,T]$, 并且$a\in\Lambda^+$, $f(t,x)\geq 0$, $I_k(x)\geq 0$, 这里$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$. 当下面条件之一成立时:

即对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty\ \text{或}\ \lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0;$$

$$(ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty\ \text{或}\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0.$$

一致成立, 则(3.17)至少存在一个正解.

定理 3.7 如果对所有的$x\in\mathbf{R}^+$和几乎所有的$t\in[0,T]$,并且$a\in\Lambda^-$, $f(t,x)\leq 0$, $I_k(x)\leq 0$, 这里$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$. 当下面条件之一成立时:

即对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1;$$

$$(ii)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1;$$

一致成立, 则(3.17)至少存在一个正解.

推论 3.5 如果对所有的$x\in\mathbf{R}^+$和几乎所有的$t\in[0,T]$, 并且$a\in\Lambda^-$, $f(t,x)\leq 0$, $I_k(x)\leq 0$, 这里$\mathbf{R}^+=[0,\infty)$. 当下面条件之一成立时:

即对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=-\infty\ \text{或}\ \lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0;$$

$$(ii)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=-\infty\ \text{或}\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0.$$

一致成立, 则(3.17)至少存在一个正解.

例3.1: 如果$a\in\Lambda^+$, $0<\alpha,\beta<1$, $0<\alpha',\beta'<1$ 或者$\alpha,\beta>1$, $\alpha',\beta'>1$, 则边值

问题

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = x^{\alpha} + x^{\beta}, \\ \Delta x'|_{t=t_k} = (x^{\alpha'}(t_k)) + (x^{\beta'}(t_k)), \qquad k = 1, 2, \cdots, p. \\ x(0) = x(T),\ x'(0) = x'(T). \end{cases} \tag{3.18}$$

至少存在一个正解.

证明: 当$0 < \alpha, \beta < 1$时, $f(t,x) = x^{\alpha} + x^{\beta}$ 和$I_k(x) = (x^{\alpha'}(t_k)) + (x^{\beta'}(t_k))$都是在$\infty$是次线性的, 在0是超线性的; 当$\alpha, \beta > 1$时, 情况则恰恰相反. 因此无论怎样根据推论3.4结论成立. □

事实上, 我们可以根据定理3.2和定理3.4得到多个解存在的条件. 为了方便起见, 我们作出如下的假设:

对几乎所有的$t \in [0, T]$,

$$(H_{31})\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + m \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} > 1 \ \text{和}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + m \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} > 1,$$

一致成立;

对几乎所有的$t \in [0, T]$,

$$(H_{31})^{-}\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + M \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} > 1 \ \text{和}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + M \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} > 1,$$

一致成立;

对几乎所有的$t \in [0, T]$,

$$(H_{32})\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + M \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} < 1 \ \text{和}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + M \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} < 1,$$

一致成立;

对几乎所有的$t \in [0, T]$,

$$(H_{32})^{-}\ \lim_{x \to 0^+} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + m \lim_{x \to 0^+} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} < 1 \ \text{和}\ \lim_{x \to +\infty} \frac{f(t,x)}{a(t)x} + m \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=1}^{p} \frac{I_k(x)}{x} < 1,$$

一致成立;

(H_{33}) 存在$q>0$, 当$\sigma q \le x \le q$ 时,

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

$(H_{33})^-$ 存在$q>0$, 当$\sigma q \le x \le q$ 时,

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1,\ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

(H_{34}) 存在$q>0$, 当$\sigma q \le x \le q$ 时,

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

$(H_{34})^-$ 存在$q>0$, 当$\sigma q \le x \le q$ 时,

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}>1,\ a.\,e.\ t\in[0,T];$$

这里在(H_{33})和(H_{34})中, 如果$a(t)\in\Lambda^+$, 则$\sigma=\frac{m}{M}$; 在$(H_{33})^-$和$(H_{34})^-$中, 如果$a(t)\in\Lambda^-$, 则$\sigma=\frac{M}{m}$.

定理 3.8 如果对所有的$x\in\mathbf{R}^+$, 当$a\in\Lambda^+$, $f(t,x)\ge 0$, $I_k(x)\ge 0$且(H_1) 和 (H_{33})((H_{32}) 和 (H_{34})) 成立时, (3.17) 至少存在两个正解且$0<\|x_1\|<q<\|x_2\|$.

证明: 直接根据定理3.2, 分别令r 足够的小和R充分大. □

推论 3.6 定理3.8中, 如果用条件(H_{31}^*) 和 (H_{32}^*)代替条件(H_{31}) 和 (H_{32}), 则结论也成立.

对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$(H_{31}^*)\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty \text{或} \lim_{x\to 0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=+\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty \text{或} \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=+\infty,$$

一致成立;

对几乎所有的$t \in [0,T]$,

$$(H_{32}^*)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0,$$

一致成立.

定理 3.9 如果对所有的$x \in \mathbf{R}^+$, 当$a \in \Lambda^-$, $f(t,x) \le 0$, $I_k(x) \le 0$且$(H_{31})^-$ 和 $(H_{33})^-$ ($(H_{32})^-$ 和 $(H_{34})^-$) 成立时, (3.17) 至少存在两个正解且$0 < \|x_1\| < q < \|x_2\|$.

证明: 直接根据定理3.4, 分别令r 足够的小和R充分大. □

推论 3.7 定理3.9中, 如果条件$(H_{31})^-$ 和 $(H_{32})^-$ 由下面的条件$(H_{31}^*)^-$ 和$(H_{32}^*)^-$代替, 则结论仍然成立.

对几乎所有的$t \in [0,T]$,

$$(H_{31}^*)^-\ \lim_{x\to0^+}\frac{f(t,x)}{x}=-\infty \text{ 或 } \lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=-\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=-\infty \text{ 或 } \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=-\infty,$$

一致成立;

对几乎所有的$t \in [0,T]$,

$$(H_{32}^*)^-\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\frac{f(t,x)}{x}=0,\ \lim_{x\to0^+}\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}=0,$$

一致成立.

例2:如果$0<\alpha<1<\beta$, $b(t),a(t) \in C([0,T],(0,\infty))$ 且$a(t) \in \Lambda^+$,如果下面条件成立

$$\max_{t\in[0,T]}\frac{b(t)}{a(t)} < \sigma(1-Mpa^m)\sup_{x\in(0,\infty)}\frac{x}{(x^\alpha+x^\beta)} \tag{3.19}$$

成立, 则边值问题

$$\begin{cases} x''+a(t)x=b(t)(x^\alpha+x^\beta), \\ \Delta x'|_{t=t_k}=a_k x(t_k), \qquad k=1,2,\cdots,p. \\ x(0)=x(T),\ x'(0)=x'(T). \end{cases} \tag{3.20}$$

至少存在两个正解.

证明: 根据推论3.6 和$f(t,x)=b(t)(x^{\alpha}+x^{\beta})$, 显然对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty,$$

一致成立. 所以(H_{31}^{*}) 成立.

令

$$F(x):=\frac{x}{x^{\alpha}+x^{\beta}},\quad x>0,$$

则$F(0+)=0, F(\infty)=0$, 因此存在$q>0$ 使得

$$F(q)=\sup_{x\in(0,\infty)}F(x).$$

当$\sigma q\le x\le q$时, 对任意的$0\le t\le T$,

$$\begin{aligned}\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x} &= \frac{b(t)}{a(t)}(\frac{x^{\alpha}+x^{\beta}}{x})+Mpa^{m}\\ &\le \max_{t\in[0,T]}\frac{b(t)}{a(t)}(\frac{q^{\alpha}+q^{\beta}}{\sigma q})+Mpa^{m}\\ &= \max_{t\in[0,T]}\frac{b(t)}{a(t)}(\frac{1}{\sigma F(q)})+Mpa^{m}\\ &< 1\end{aligned}$$

所以(H_{33}) 成立.

所以推论3.6条件满足, 系统(3.20)至少存在两个正解. □

(二) 奇异边值问题

本节我们将主要讨论奇异边值问题. 文[69]Lazer 和Solimini 对模型

$$x''\pm\frac{1}{x^{\alpha}}=p(t)$$

的研究拉开了讨论奇异边值问题的序幕, 最近[70-73]也讨论了这类问题的正解

的存在性问题. 下面我们主要讨论有脉冲的周期边值问题

$$\begin{cases} x''+a(t)x=f(t,x), & t\neq t_k, \quad t\in[0,T], \\ \Delta x'|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p, \\ x(0)=x(T), x'(0)=x'(T). \end{cases} \tag{3.21}$$

其中$a\in L^1(0,T)$ 且$f\in Car([0,T]\times(0,\infty),\mathbf{R})$.

如果对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$\lim_{x\to0^+} f(t,x)=-\infty, \tag{3.22}$$

一致成立, 则称(3.21)有一个吸引奇点;

如果对几乎所有的$t\in[0,T]$,

$$\lim_{x\to0^+} f(t,x)=+\infty, \tag{3.23}$$

一致成立, 则称(3.21)有一个排斥奇点.

对于吸引系统, 证明周期正解的存在性问题的比较经典的方法是上下解的方法, 现在我们将利用前面得到的结果来证明吸引系统的正解的存在性.

推论 3.8 如果$a\in\Lambda^-$ 和条件(3.22)成立且存在一个$R>0$, 对几乎所有的$t\in[0,T]$,有

$$f(t,x)\leq 0 \text{ 和 } I_k(x)\leq 0,\ \forall x\in(0,R] \tag{3.24}$$

和

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+m\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\leq 1,\ \forall x\in[\frac{m}{M},R]. \tag{3.25}$$

则系统(3.21) 至少存在一个正解.

例3: 如果$a\in\Lambda^-, c_k\leq 0, \beta>0, 0<\alpha<1, 0<\alpha'<1$ 且$b(t)>0$, 则系统

$$\begin{cases} x''+a(t)x+b(t)x^{\alpha}+\frac{1}{x^{\beta}}=0, & t\neq t_k, \quad t\in[0,T], \\ \Delta x'|_{t=t_k}=c_k x^{\alpha'}(t_k), & k=1,2,\cdots,p, \\ x(0)=x(T), x'(0)=x'(T). \end{cases}$$

至少存在一个正解.

证明: : 因为$a\in\Lambda^-$, 所以$m<M<0$. $f(t,x)=-\frac{1}{x^\beta}-b(t)x^\alpha$ 是非负的, 0点是奇异的, $I_k(x(t_k))=c_kx^{\alpha'}(t_k)\le 0$ 且

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}=\frac{1}{a(t)}(-\frac{b(t)}{x^{1-\alpha}}-\frac{1}{x^{1+\beta}})\to 0,\ \ \frac{mc_k}{x^{1-\alpha'}}\to 0,\ \ (x\to+\infty)$$

所以, 容易证明推论3.8的条件成立. □

下面我们来讨论排斥系统

推论 3.9 如果$a\in\Lambda^+$和条件(3.23)成立且存在一个$R>0$, 对几乎所有的$t\in[0,T]$,有

$$f(t,x)\ge 0 \text{ 和 } I_k(x)\ge 0\quad \forall x\in(0,R] \tag{3.26}$$

和

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}\le 1,\quad \forall x\in[\frac{m}{M}R,R] \tag{3.27}$$

则系统(3.21) 至少存在一个正解.

证明: 由(3.23)和(3.27)知当r充分小时, 定理3.1的条件成立, 所以系统(3.21) 至少存在一个正解. □

例4: 考虑下面的脉冲问题

$$\begin{cases} x''-\frac{a}{x^\lambda}+k^2x=e(t), & t\ne t_k,\quad t\in[0,T],\\ \Delta x'|_{t=t_k}=c_kx(t_k), & k=1,2,\cdots,p,\\ x(0)=x(1),x'(0)=x'(1). \end{cases} \tag{3.28}$$

及$a>0$, $k>0$, $0\le c_k<\frac{1}{Mp}$, $\lambda>0$, $e\in L[0,1]$. 令

$$e^*=\sup esse(t),\quad e_*=\inf esse(t).$$

推论 3.10 如果$k\in(0,\pi)$, $e\in L^1[0,1]$ 使得$e_*<0$ 及下面的不等式成立

$$e^*\le\frac{e_*}{\cos^\lambda(\frac{k}{2})}+(1-Mpc^m)k^2(\frac{a}{|e_*|})^{\frac{1}{\lambda}}\cos(\frac{k}{2}). \tag{3.29}$$

则系统(3.28)至少存在一个正解.

证明: 如果$k\in(0,\pi)$, 则$k^2\in\Lambda^+$ 根据文献[67]可以计算格林函数的最大和最小值,

$$m=\frac{1}{2k}\cot(\frac{k}{2}),\quad M=\frac{1}{2k\sin(\frac{k}{2})},$$

所以$\frac{m}{M}=\cos(\frac{k}{2})$ 而条件(3.26)-(3.27) 变为存在$R>0$使得对$\forall x\in(0,R]$,

$$\frac{a}{x^\lambda}+e_*\geq 0, \tag{3.30}$$

和对$\forall x\in[R\cos(\frac{k}{2}),R]$,

$$\frac{a}{x^\lambda}+e^*\leq(1-Mpc^m)k^2x, \tag{3.31}$$

现在, 固定$R=(\frac{a}{|e_*|})^{\frac{1}{\lambda}}$, 则满足不等式(3.30). 根据单调性知$(1-Mpc^m)k^2x-\frac{a}{x^\lambda}$, 如果

$$e^*\leq\frac{e_*}{\cos^\lambda(\frac{k}{2})}+(1-Mpc^m)k^2(\frac{a}{|e_*|})^{\frac{1}{\lambda}}\cos(\frac{k}{2}),$$

则(3.31) 成立.

所以根据推论3.9 系统(3.28)至少存在一个正解.□

例5 如果$a(t)\in\Lambda^+$, $\lambda>0$, $0\leq c_k<\frac{1}{Mp}$, $b\in L^\infty[0,1]$ 使得$b_*>0$, 则对任意的$e\in L^\infty[0,1]$ 满足$e_*\geq 0$, 下面的问题

$$\begin{cases} x''+a(t)x-\frac{b(t)}{x^\lambda}=e(t), & t\neq t_k,\quad t\in[0,1],\\ \Delta x'|_{t=t_k}=c_kx(t_k), & k=1,2,\cdots,p,\\ x(0)=x(1),x'(0)=x'(1). \end{cases}$$

至少存在一个正解.

推论 3.11 如果$a\in\Lambda^+$ 和(3.23) 成立. 而且有下面的条件成立:

$$f(t,x)>0,\ 和\ I_k(x)>0\quad\forall\,x>0; \tag{3.32}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(t,x)}{x}=+\infty; \tag{3.33}$$

并且存在一个$R>0$对几乎所有的$t\in[0,T]$, 使得

$$\frac{f(t,x)}{a(t)x}+M\sum_{k=1}^{p}\frac{I_k(x)}{x}<1;\quad \forall\, x\in(\frac{m}{M}R,R) \tag{3.34}$$

则系统(3.21)至少存在两个正解.

证明: 直接根据定理4.3, 问题得证. □

3.2 二阶奇异脉冲微分方程的周期解

本节我们主要讨论有脉冲的Hill方程的扰动系统:

$$\begin{cases} x''+a(t)x=f(t,x), & t\neq t_k,\quad t\in J,\\ \Delta x'|_{t=t_k}=I_k(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{3.35}$$

这里, $J=[0,1]$, 给定$0<t_1<t_2<\cdots<t_p<1$. $I_k\in C(J,R)$. $\Delta x'|_{t=t_k}=x'(t_k^+)-x'(t_k^-)$, 其中$x'(t_k^+)$ 和$x'(t_k^-)$ 分别表示$x'(t)$ 在$t=t_k$ 点的右极限和左极限. 下面主要来讨论$f(t,x)$ 在$x=0$ 是排斥的, $f(t,x)$ 在$x=+\infty$ 是超线性的脉冲系统(3.35)满足周期边值条件

$$x(0)=x(1),\qquad x'(0)=x'(1). \tag{3.36}$$

（假设周期为1）的多个周期正解的存在性.

在物理学上, 如果

$$\lim_{x\to 0^+}f(t,x)=+\infty. \tag{3.37}$$

称(3.35)在$x=0$ 是排斥的. 如果

$$\lim_{x\to+\infty}f(t,x)/x=+\infty. \tag{3.38}$$

则称(3.35)在$x=+\infty$ 是超线性的.

对于没有脉冲的奇异二阶微分方程的研究已经有了一些初步的研究成果(参见文献[75]). 例如Brillouin 吸引系统(参见文献[103,104,105])和非线性弹性伸缩系统(参见文献[77,106]), 文献[105]中讨论了Ermakov–Pinney方程

$$x''+a(t)x=x^{-3},$$

的正周期解的存在性.

最近文[75]得到没有脉冲(3.35)的周期正解的存在性条件. 鉴于脉冲在实际问题中的应用, 本节来讨论在脉冲扰动下的(3.35)的周期正解的存在性.

本节，我们主要假设没有扰动的系统(3.35)

$$x'' + a(t)x = 0 \tag{3.39}$$

满足下面的条件:

(A): 对任意的$(t,s) \in [0,1] \times [0,1]$ 及下面(3.40)的边值问题, 格林函数$G(t,s)$是正的.

其中(3.40)式为

$$x'' + a(t)x = h(t), \qquad x(0) = x(1), \qquad x'(0) = x'(1). \tag{3.40}$$

也就是说, (3.40)式的反最大值规律成立. 而且(3.40)的解可以表示为

$$x(t) = (\mathcal{L}h)(t) := \int_0^1 G(t,s)h(s)ds. \tag{3.41}$$

为了保证$G(t,s)$ 是正的, 最近文[67,74]证明了若$a(t)$ 满足$a \succ 0$ 则$G(t,s)$是正的等价于

$$\underline{\lambda}_1(a) > 0, \tag{3.42}$$

其中符号$a \succ 0$ 表示$\forall \ t \in [0,1]$, $a(t) \geq 0$; $a(t) > 0$ 为正测集的一个子集. 符号$\underline{\lambda}_1(a)$表示

$$x'' + (\lambda + a(t))x = 0 \tag{3.43}$$

的边值问题

$$x(0) = -x(1), \qquad x'(0) = -x'(1), \tag{3.44}$$

的第一个反周期特征值.

最近文献[74] 也得到保证条件(A) 成立的结果. 为此我们引入[74]的结果对任意给定的$q \in [1,\infty]$, 我们用$\|\cdot\|_q$ 来表示通常意义下的$(0,1)$ 上的L^q范数. q 的共轭

表示为q^* 且$\frac{1}{q}+\frac{1}{q^*}=1$. 令$\mathbf{K}(q)$ 下面的不等式

$$C\|u\|_q^2 \le \|u'\|_2^2, \qquad \forall u \in H_0^1(0,1).$$

的Sobolev常数, 表达式为

$$\mathbf{K}(q)=\begin{cases} \frac{2\pi}{q}\left(\frac{2}{2+q}\right)^{1-2/q}\left(\frac{\Gamma(\frac{1}{q})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{q})}\right)^2 & 1\le q<\infty, \\ 4 & q=\infty, \end{cases} \tag{3.45}$$

其中Γ 为Gamma 函数.

引理 3.12 [74] 当$1\le p\le\infty$ 时, $a(t)>0$ 且$a\in L^p[0,1]$. 如果

$$\|a\|_p < K(2p^*), \tag{3.46}$$

则(3.40)满足假设条件(A), 对$\forall(t,s)\in[0,1]\times[0,1]$, $G(t,s)>0$.

注: 当$p=1$时, 根据Lyapunov稳定性定理知(3.46)可以化简为$\|a\|_1\le\mathbf{K}(\infty)=4$. 当$p=\infty$时, (3.46)可以化简为$\|a\|_\infty<\mathbf{K}(2)=\pi^2$, 本节所讨论的情况(3.46)可以化简为$a(t)<\pi^2$.

下面在假设(A) 成立的条件下, 记

$$A=\min_{0\le s,t\le 1} G(t,s), \quad B=\max_{0\le s,t\le 1} G(t,s), \quad \sigma=A/B. \tag{3.47}$$

则$B>A>0$, $0<\sigma<1$. 用$w(t)$ 来表示当$h(t)=1$时, (3.40)的唯一的周期解, $w(t)=(\mathcal{L}1)(t)$. 而且, $A\le\|w\|_\infty\le B$.

为了定义(3.35)的解, 我们定义

$J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$,

$$X=PC'(J,R)=\{x:J\to R|x\in C(J,R);\ x'|_{(t_k,t_{k+1})}\in C(t_k,t_{k+1}),\ \ x'(t_k^-)=x'(t_k),\ \exists\, x'(t_k^+)\}.$$

则$X=PC'(J,R)$ 及范数

$$\|x\|_{PC'}=\max\{\|x\|_C,\|x'\|_{PC}\}$$

其中

$$\|x\|_C = \sup_{t\in J}|x(t)|, \quad \|x'\|_{PC} = \sup_{t\in J}|x'(t)|$$

构成一个Banach 空间.

引理 3.13 如果x 是方程

$$x(t) = \int_0^T G(t,s)h(s)ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)), \tag{3.48}$$

的解, 其中$G(t,s)$ 是下面方程的格林函数.

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = 0, & t\in J, \\ x(0) = x(1), \ \ x'(0) = x'(1). \end{cases} \tag{3.49}$$

则x 是脉冲问题(3.50)的解

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = h(t), & t\in J', \\ x(0) = x(1), \ \ x'(0) = x'(1), \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{3.50}$$

证明: 证明过程与引理3.3类似, 从略.

在$X = PC'[0,1]$ 及范数$\|\cdot\|$ 上定义

$$K = \left\{x\in X : x(t)\ge 0 \ \forall t, \min_{0\le t\le 1} x(t) \ge \sigma\|x\|\right\}, \tag{3.51}$$

其中σ 见3.47式.

显然K 是X中的一个锥. 如果$h\in L^1(0,1)$, $h(t)\ge 0$ 关于t几乎处处成立, 则$\mathcal{L}h\in K$.

设$F:[0,1]\times R\to[0,\infty)$ 是连续函数. 对$\forall x\in X$ 和$t\in[0,1]$ 定义算子$T: X\to X$,

$$(Tx)(t) = \int_0^1 G(t,s)F(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)) \tag{3.52}$$

引理 3.14 T 是全连续的.

3.2.1 正周期解的存在性

本节假设$\forall t \in [0,1]$ 和$x > 0$, $f(t,x) > 0, I_k(x) > 0$. 我们主要讨论超线性排斥系统(见(3.37)和(3.38)), 不失一般性, 假设$f(t,x)$ 和$I_k(x)$ 满足

(F_1): 任意的常数$L > 0$, 存在函数$\phi_L > 0$ 使得

$$f(t,x) \geq \phi_L(t), \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times (0,L];$$

有很多函数是非线性的例如$f(t,x) = b(t)x^{-\alpha} + c(t)x^{\beta} + e(t)$ 和$f(t,x) = b(t)x^{-\alpha} + c(t)e^{x} + e(t)$, α, $\beta > 0$, 为此关于$f(t,x)$ 和$I_k(x)$ 做如下的假设:

(F_2): 在$(0,\infty)$存在连续非负函数$g(x)$, $h(x)$ 和$\gamma(x)$ 使得

$$f(t,x) \leq g(x) + h(x) \quad \forall (t,x) \in [0,1] \times (0,\infty),$$

$$\sum_{k=1}^{p} I_k(x) \leq \gamma(x) \quad \forall (t_k,x) \in [0,1] \times (0,\infty)$$

而且在$x \in (0,\infty)$上$g(x) > 0$ 是不增的函数, $h(x)/g(x)$ 和$\gamma(x)$ 都是不减函数.

定理 3.10 如果$a(t)$ 满足条件(A), $f(t,x)$ 满足条件(F_1) 和(F_2). 而且还有下面的条件(F_3)成立

(F_3): 存在一个正数r 使得

$$r > \|\omega\| g(\sigma r)(1 + h(r)/g(r)) + B\gamma(r),$$

其中σ, B 和$\omega(t)$ 见(3.47)式.

则(3.35) 至少存在一个正周期解且$0 < \|x\| < r$.

证明: 我们将利用Leray–Schauder 抉择定理来证明解的存在性.

令$N_0 = \{n_0, n_0+1, \cdots\}$, 其中选择$n_0 \in \{1,2,\cdots\}$ 使得

$$\|\omega\| g(\sigma r)(1 + h(r)/g(r)) + B\gamma(r) + 1/n_0 < r.$$

见(F_3). 固定$n \in N_0$. 考虑下面的方程

$$
\begin{cases} x'' + a(t)x = \lambda f_n(t, x(t)) + a(t)/n, & t \neq t_k \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1, 2, \cdots, p, \end{cases} \tag{3.53}
$$

其中$\lambda \in [0,1]$, $\forall (t,x) \in [0,1] \times R$, $f_n(t,x) = f(t, \max\{x, 1/n\})$. 则问题(3.53) -(3.36) 等价于在$PC'[0,1]$上的下面的不动点问题

$$
x = \lambda T_n x + 1/n, \tag{3.54}
$$

其中T_n 如(3.52)式所定义的算子, $f_n(t,x)$来代替$F(t,x)$.

则$\forall \lambda \in [0,1]$ (3.54)的任意不动点一定满足$\|x\| \neq r$. 若不然, 假设对某一$\lambda \in [0,1]$ x 是(3.54)的一个解使得$\|x\| = r$. 由$f_n(t,x) \geq 0$, 再根据引理3.14 知$\forall t$, $x(t) \geq 1/n$ 和$r \geq x(t) \geq 1/n + \sigma\|x - 1/n\|$. 由$n_0$的选取知$1/n \leq 1/n_0 < r$. 而且对任意的$t$

$$
x(t) \geq 1/n \quad 和 \quad r \geq x(t) \geq 1/n + \sigma\|x - 1/n\| \geq 1/n + \sigma(r - 1/n) > \sigma r. \tag{3.55}
$$

由(3.55)和条件(F_2)知, 对任意的t,

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \lambda\Big(\int_0^1 G(t,s) f_n(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^{p} G(t, t_k) I_k(x(t_k))\Big) + 1/n \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) f(s, x(s)) ds + \sum_{k=1}^{p} G(t, t_k) I_k(x(t_k)) + 1/n \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) g(x(s))(1 + h(x(s))/g(x(s))) ds + B\sum_{k=1}^{p} I_k(x(t_k)) + 1/n \\
&\leq g(\sigma r)(1 + h(r)/g(r)) \int_0^1 G(t,s) ds + B\gamma(r) + 1/n_0 \\
&\leq \|\omega\| g(\sigma r)(1 + h(r)/g(r)) + B\gamma(r) + 1/n_0.
\end{aligned} \tag{3.56}
$$

因此,

$$
r = \|x\| \leq \|\omega\| g(\sigma r)(1 + h(r)/g(r)) + B\gamma(r) + 1/n_0.
$$

这与n_0 的选取矛盾, 所以$\forall \lambda \in [0,1]$, (3.54)的任意不动点一定满足$\|x\| \neq r$.

由前面的证明和Leray–Schauder 抉择定理知(3.54)($\lambda = 1$)有一个不动点, 记为x_n, 则方程(3.53) ($\lambda = 1$) 有一个周期解x_n 且$\|x_n\| < r$. 因为x_n 满足(3.54)式, 对$\forall t$,

$x_n(t) \geq 1/n$ 而且x_n 是(3.53)($\lambda = 1$)的一个周期解.

下面证明解x_n有一个一致有界的下界, 即存在一个与$n \in N_0$无关的常数$\delta > 0$, 使得对任意的$n \in N_0$

$$\min_t x_n(t) \geq \delta. \tag{3.57}$$

由(F_1) 知存在一个函数$\phi_r > 0$ 使得$\forall (t,x) \in [0,1] \times (0,r]$, $f(t,x) \geq \phi_r(t)$. 所以

$$\begin{aligned} x_n(t) &= \int_0^1 G(t,s) f_n(s, x_n(s)) ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k) I_k(x(t_k)) + 1/n \\ &= \int_0^1 G(t,s) f(s, x_n(s)) ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k) I_k(x(t_k)) + 1/n \\ &\geq \int_0^1 G(t,s) \phi_r(s) ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k) I_k(x(t_k)) + 1/n \\ &\geq \int_0^1 G(t,s) \phi_r(s) ds \\ &\geq A \|\phi_r\|_1 =: \delta. \end{aligned}$$

下面只需证: 存在常数$H > 0$ 和所有的$n \geq n_0$, 有

$$\|x_n'\| \leq H. \tag{3.58}$$

因为$\delta \leq x_n(t) \leq r$, 令

$$M_1 = \max_{t \in [0,1]} \max_{x \in [\delta, r]} f(t,x), \ M_2 = \max_{t,s \in [0,1]} |G_t'(t,s)|, \ M_3 = \max_{x \in [\delta, r]} \sum_{k=1}^{p} I_k(x)$$

则

$$\begin{aligned} \|x_n'\| &= \max_{0 \leq t \leq 1} |x_n'(t)| = \max_{0 \leq t \leq 1} \left| \int_0^1 G_t'(t,s) f(s, x_n(s)) ds + \sum_{k=1}^{p} G_t'(t,t_k) I_k(x(t_k)) \right| \\ &\leq M_1 M_2 + M_3 M_2 =: H. \end{aligned}$$

由$\|x_n\| < r$ 和(3.58) 知$\{x_n\}_{n \in N_0}$ 在$[0,1]$上是有界的而且等度连续. 根据Arzela-Ascoli 定理知$\{x_n\}_{n \in N_0}$ 存在一个子序列, $\{x_{n_k}\}_{k \in N}$, 在$[0,1]$ 上一致收敛到函数$x \in$

$C[0,1]$. 由$\|x_n\| < r$ 和(3.57), $\forall t$, x 满足$\delta \le x_n(t) \le r$. 而且, x_{n_ν} 满足积分方程

$$x_{n_\nu}(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x_{n_\nu}(s))ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)) + 1/n_\nu.$$

令$\nu \to \infty$, 则

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)),$$

其中$f(t,x)$ 在$[0,1]\times[\delta,r]$ 上是一致连续的. 所以x 是(3.35)的一个正周期解.

最后不难证明$\|x\| < r$. 与前面的类似证明$\|x\| = r$是不可能的. □

推论 3.15 根据定理3.10考虑(3.35) 中, 若$f(t,x), I_k(x)$为下面的非线性系统

$$\begin{cases} f(t,x) = b(t)x^{-\alpha} + \mu c(t)x^{\beta} + e(t), & 0 \le t \le 1 \quad t \ne t_k, \\ I_k(x) = \gamma_k x, & k = 1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{3.59}$$

其中$\alpha > 0, \beta \ge 0, \gamma_k > 0$, 对任意的$t$, $b(t)$, $c(t), e(t), \in C[0,1]$ 都是非负函数且$b(t) > 0$, $\mu > 0$ 是一个正数. 而且, $B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k < 1$. 则

(i) 如果$\beta < 1$, 当$\mu > 0$时, (3.35) 至少存在一个正周期解.

(ii) 如果$\beta \ge 1$, 当$0 < \mu < \mu_*$(其中μ_* 是某正常数)时, (3.35) 至少存在一个正周期解.

证明: 我们只需验证前面的定理3.10的三个条件.

取$\phi_L(t) = L^{-\alpha}\cdot \min_t b(t)$, 则条件$(F_1)$ 满足.

取

$$g(x) = b_0 x^{-\alpha}, \qquad h(x) = \mu c_0 x^{\beta} + e_0, \qquad \gamma(x) = \sum_{k=1}^{p}\gamma_k x,$$

其中

$$b_0 = \max_t b(t) > 0, \qquad c_0 = \max_t c(t) \ge 0, \qquad e_0 = \max_t e(t) \ge 0.$$

则条件(F_2) 满足.

条件(F_3)为: 对$r > 0$,

$$\mu < \frac{(1 - B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)\sigma^{\alpha}r^{\alpha+1}/\|w\| - b_0 - e_0 r^{\alpha}}{c_0 r^{\alpha+\beta}}$$

所以当

$$0<\mu<\mu_*:=\sup_{r>0}\frac{(1-B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)\sigma^{\alpha}r^{\alpha+1}/\|w\|-b_0-e_0r^{\alpha}}{c_0r^{\alpha+\beta}}.$$

时,

(3.35)至少存在一个正的周期解.

注意到当$\beta<1$时, $\mu_*=\infty$; 当$\beta\geq 1$时, $\mu_*<\infty$.

定理3.10也可以应用于下面的例子

$$\begin{cases} f(t,x)=b(t)x^{-\alpha}+\mu c(t)e^{x}+e(t), & 0\leq t\leq 1 \quad t\neq t_k, \\ I_k(x)=\gamma_k x, & k=1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{3.60}$$

我们会得到类似推论3.15的结果.

定理3.10也可以应用于下面的排斥系统

$$\begin{cases} f(t,x)=b(t)x^{\beta}+e(t), & 0\leq t\leq 1 \quad t\neq t_k, \\ I_k(x)=\gamma_k x, & k=1,2,\cdots,p, \end{cases}$$

这里$b\geq 0, \gamma_k>0, e>0, B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k<1$

下面我们将利用锥不动点定理来找系统(3.35)的另一个正周期解.

定理 3.11 如果条件(A)和(F_1)-(F_3)成立. 而且,

(F_4): 在$(0,\infty)$上, 存在非负连续函数$g_1(x)$, $h_1(x)$和$\gamma_1(x)$使得

$$f(t,x)\geq g_1(x)+h_1(x) \qquad \forall (t,x)\in[0,1]\times(0,\infty);$$

$$\sum_{k=1}^{p}I_k(x)\geq \gamma_1(x) \qquad \forall (t,x)\in[0,1]\times(0,\infty)$$

这里$g_1(x)>0$在$x\in(0,\infty)$上是不增的, $h_1(x)/g_1(x)$和$\gamma_1(x)$在$x\in(0,\infty)$上是不减的;

(F_5): 存在一个正数$R>r$使得

$$R\leq\|\omega\|\sigma g_1(R)(1+h_1(\sigma R)/g_1(\sigma R))+A\gamma_1(\sigma R),$$

其中σ, A和$\omega(t)$见(3.47)式.

则除了定理3.10中的解外，系统(3.35)至少还存在一个解$\tilde{x}$且$r < \|\tilde{x}\| \le R$.

证明：令$X = PC'[J,R]$, K为X中的锥，令$\Omega_1 = B_r \subset X$, $\Omega_2 = B_R \subset X$. 由(3.52)定义算子$T: K \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1) \to K$, 由$K$的定义知，对任意的$x \in K \cap (\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$都有$0 < \sigma r \le x(t) \le R$.

首先我们证明当$x \in K \cap \partial\Omega_1$时，$\|Tx\| < \|x\|$. 事实上，如果当$x \in K \cap \partial\Omega_1$, 时$\|x\| = r$. 与前面(3.56)式的证明类似可以得到$\|Tx\| < r$, 矛盾.

下面我们证明当$x \in K \cap \partial\Omega_2$时，$\|Tx\| \ge \|x\|$.

令$x \in K \cap \partial\Omega_2$. 则$\|x\| = R$, $x(t) \ge \sigma R$. 由(F_4)和(F_5)知，当$0 \le t \le 1$时

$$
\begin{aligned}
(Tx)(t) &= \int_0^1 G(t,s)f(s,x(s))ds + \sum_{k=1}^{p} G(t,t_k)I_k(x(t_k)) \\
&\ge \int_0^1 G(t,s)g_1(x(s))(1 + h_1(x(s))/g_1(x(s)))ds + A\sum_{k=1}^{p} I_k(x(t_k)) \\
&\ge \int_0^1 G(t,s)g_1(R)(1 + h_1(\sigma R)/g_1(\sigma R))ds + A\gamma_1(\sigma R) \\
&= g_1(R)(1 + h_1(\sigma R)/g_1(\sigma R))\omega(t) + A\gamma_1(\sigma R) \\
&\ge \sigma\|\omega\|g_1(R)(1 + h_1(\sigma R)/g_1(\sigma R)) + A\gamma_1(\sigma R) \\
&\ge R = \|x\|.
\end{aligned}
$$

所以$\|Tx\| \ge \|x\|$.

由锥不动点定理1.7 知T有一个不动点$\tilde{x} \in K \cap (\overline{\Omega}_2 \backslash \Omega_1)$. 而且$r \le \|\tilde{x}\| \le R$. 显然$\tilde{x}$是(3.35)的正周期解且$\|\tilde{x}\| > r$.

这时我们再来考虑(3.59)式超线性$\beta > 1$时的情况. 令$c(t) > 0$. 验证条件(F_4), 令

$$
g_1(x) = b_1 x^{-\alpha}, \qquad h_1(x) = \mu c_1 x^{\beta} + e_1, \qquad \gamma_1(x) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k x
$$

其中

$$
b_1 = \min_t b(t) > 0, \qquad c_1 = \min_t c(t) > 0, \qquad e_1 = \min_t e(t) \ge 0.
$$

条件(F_5)为

$$
\mu \ge \frac{(1 - A\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)R^{\alpha+1}/(\sigma\|w\|) - b_1 - e_1 R^{\alpha}}{c_1 R^{\alpha+\beta}}. \tag{3.61}
$$

因为$\beta > 1$, 所以当$R \to +\infty$时，上式右端趋近于0. 所以对于任意给定的$0 < \mu < \mu_*$, 其中μ_*见推论3.15总可以找到充分大的$R \gg r$满足(3.61)式. 所以(3.35)存在一个正

周期解$\bar{x}$并且$\|\bar{x}\| > r$.

推论 3.16 (3.59)中如果$\beta > 1$, $\gamma_k > 0$, $B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k < 1$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, 则$0 < \mu < \mu_*$相应的系统(3.35)至少存在两个不同的脉冲周期解.

对于(3.60)也有类似的结论.

3.2.2 半正定性

本节主要来讨论当(3.35)为半正定的情况下的多个解的存在性问题. (3.35)为半正定的情况是指$f(t,x)$ 可以改变符号并且满足下面的条件

(G_1) 存在一个常数$M > 0$, 对任意的$(t,x) \in [0,1]\times(0,\infty)$, 使得$F(t,x) := f(t,x)+M \geq 0$.

(G_2) 存在非负连续函数$g(x)$, $h(x)$ 和$\gamma(x)$ 使得$F(t,x) \leq g(x)+h(x)$, $\sum_{k=1}^{p}I_k(x) \leq \gamma(x)$. 并且当$x \in (0,\infty)$ 时, $g(x) > 0$ 是不增的, $\gamma(x)$ 和$h(x)/g(x)$ 是不减的;

(G_3) 当$x \in (0,\infty)$ 时, 存在一个不增的连续函数$g_0(x)$ 和一个常数$R_0 > 0$ 使得当$(t,x) \in [0,1] \times (0,R_0]$时, $f(t,x) \geq g_0(x)$ 其中$g_0(x)$ 满足$\lim_{x\to 0^+} g_0(x) = +\infty$ 和$\lim_{x\to 0^+}\int_x^{R_0} g_0(u)du = +\infty$.

定理 3.12 如果$a(t)$ 满足条件(A), $f(t,x)$ 和$I_k(x)$ $k = 1,2,\cdots,p$满足条件(G_1)–(G_3). 而且,

(G_4) 存在$r > M\|\omega\|/\sigma$, 使得$r > g(\sigma r - M\|\omega\|)(1 + h(r)/g(r))\|\omega\| + B\gamma(r)$, 这里$\sigma$, B 和$\omega(t)$ 见(3.47)式. 则系统(3.35)至少存在一个正的周期解且$0 < \|x + M\omega\| < r$.

证明: 因为此定理的证明与前面的定理3.10的证明有一部分类似, 因此这里我们只给出不同的部分.

令$N_0 = \{n_0, n_0+1, \cdots\}$, 这里选取适当的$n_0 \in \{1,2,\cdots\}$ 使得$1/n_0 < \sigma r - M\|\omega\|$ 和

$$\|\omega\|g(\sigma r - M\|\omega\|)(1 + h(r)/g(r)) + B\gamma(r) + 1/n_0 < r.$$

我们将首先来证明

$$\begin{cases} x'' + a(t)x = F(t, x(t) - M\omega(t)), & t \neq t_k \\ \Delta x'|_{t=t_k} = I_k(x(t_k)), & k = 1,2,\cdots,p, \end{cases} \tag{3.62}$$

存在一个满足条件(3.36)的解x并且当$t\in[0,1]$时, $x(t)>M\omega(t)$和$0<\|x\|<r$. 如果这个结果成立, 很容易证明$u(t)=x(t)-M\omega(t)$是(3.35)-(3.36)的解而且$0<\|u+M\omega\|<r$.

由(3.62), 对每一个$n\in N_0$, 考虑方程

$$\begin{cases} x''+a(t)x=\lambda F_n(t,x(t)-M\omega(t))+a(t)/n, & t\neq t_k \\ \Delta x'|_{t=t_k}=I_k^{(n)}(x(t_k)), & k=1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{3.63}$$

其中$F_n(t,x):=F(t,\max\{1/n,x\})$, $I_k^{(n)}(t,x):=I_k(\max\{1/n,x\})$, $(t,x)\in[0,1]\times R$, 且$\lambda\in[0,1]$.

问题(3.63)-(3.36) 等价于下面的不动点问题

$$x(t)=\lambda(\int_0^1 G(t,s)F_n(s,x(s)-M\omega(s))ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k^{(n)}(x(t_k)))+1/n. \tag{3.64}$$

类似前面的定理3.10的讨论, 不难证明(3.64)的任何解都满足条件$\|x\|\neq r$. 再利用Leray–Schauder抉择定理, 系统(3.63)($\lambda=1$) 对每一个$n\in N_0$, 都至少存在一个周期解x_n并且$\|x_n\|<r$. 下面我们来证明当$n\geq n_0$时, 存在常数$H>0$使得

$$\|x_n'\|\leq H$$

成立.

事实上, 因为$x_n(0)=x_n(1)$ 及$I_k^{(n)}(x(t_k))>0$, 所以存在$t_0\in[0,1]$使得$x_n'(t_0)=0$或者$[0,1]$上的脉冲点$t=t_0$ 使得$x_n'(t_0^+)=0$. 从0到1积分(3.53)式, 则

$$\int_0^1 a(t)x_n(t)dt=\int_0^1[F_n(t,x_n-M\omega)+\frac{a(t)}{n}]dt+\sum_{k=1}^{p}I_k^{(n)}(x(t_k)),$$

由$x_n'(0)=x_n'(1)$, 则

$$\begin{aligned}
\|x_n'\| &= \max_{0\le t\le 1}|x_n'(t)| \\
&= \max_{0\le t\le 1}\int_{t_0}^{t}[F_n(s,x_n(s)-M\omega)+\frac{a(s)}{n}-a(s)x_n(s)]ds+\sum_{t_0<t_k<t}I_k^{(n)}(x(t_k)) \\
&\le \max_{0\le t\le 1}\int_0^1[F_n(s,x_n(s)-M\omega)+\frac{a(s)}{n}]ds+\sum_{k=1}^{p}I_k^{(n)}(x(t_k))+a(s)\int_0^1 x_n(s)ds \\
&= 2\int_0^1 a(s)x_n(s)ds\le 2r\|a\|_1=:H.
\end{aligned}$$

下面的引理我们将来证明存在一个常数$\delta>0$和充分大的n 使得

$$x_n(t)-M\omega(t)\ge\delta \qquad \forall t\in[0,1], \tag{3.65}$$

根据类似定理3.10的讨论可以证明下面的不动点方程

$$x(t)=\int_0^1 G(t,s)F(s,x(s)-M\omega(s))ds+\sum_{k=1}^{p}G(t,t_k)I_k(x(t_k)),$$

一个解, 也就是系统(3.62)-(3.36)存在一个解x 而且$\|x\|<r$, 对任意的$t\in[0,1]$, $x(t)-M\omega(t)\ge\delta$.

引理 3.17 存在一个常数$\delta>0$ 和一个整数$n_2>n_0$ 使得(3.63)($\lambda=1$)的任何解x_n当$n\ge n_2$时, 满足(3.65).

证明: 由条件(G_3), 存在$R_1\in(0,R_0)$ 和连续函数$\tilde{g}_0$,当$(t,x)\in[0,1]\times(0,R_1]$ 时,

$$F(t,x)-a(t)x\ge\tilde{g}_0(x)>\max\{M,r\|a\|_1\} \tag{3.66}$$

其中$\tilde{g}_0$ 也满足条件(G_3).

选取$n_1\in N_0$使得$1/n_1\le R_1$ 并且令$N_1=\{n_1,n_1+1,\cdots\}$. 当$n\in N_1$ 时, 令

$$(0<)\ \alpha_n=\min_{0\le t\le 1}[x_n(t)-M\omega(t)] \qquad 和 \qquad \beta_n=\max_{0\le t\le 1}[x_n(t)-M\omega(t)].$$

则当$n\in N_1$时, $\beta_n > R_1$. 若不然, 存在$n\in N_1$使得$\beta_n \le R_1$. 则容易证明

$$F_n(t,x_n(t)-M\omega(t)) > r\|a\|_1. \tag{3.67}$$

事实上, 如果$1/n \le x_n(t)-M\omega(t) \le R_1$, 由(3.66)式得

$$\begin{aligned} F_n(t,x_n(t)-M\omega(t)) &= F(t,x_n(t)-M\omega(t)) \\ &\ge a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+\tilde{g}_0(x_n(t)-M\omega(t)) \\ &\ge \tilde{g}_0(x_n(t)-M\omega(t)) > r\|a\|_1, \end{aligned}$$

如果$x_n(t)-M\omega(t)\le 1/n$, 则

$$F_n(t,x_n(t)-M\omega(t)) = F(t,1/n) \ge a(t)/n+\tilde{g}_0(1/n) \ge \tilde{g}_0(1/n) > r\|a\|_1.$$

从0到1积分(3.63)($\lambda=1$)式, 可以得到

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 [a(t)x_n(t)-F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))-a(t)/n]\,dt-\sum_{k=1}^{p} I_k^{(n)}(x(t_k)) \\ &= \int_0^1 a(t)x_n(t)dt-(1/n)\int_0^1 a(t)dt-\int_0^1 F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))dt-\sum_{k=1}^{p} I_k^{(n)}(x(t_k)) \\ &< \int_0^1 a(t)x_n(t)dt-r\|a\|_1 \le 0, \end{aligned}$$

由(3.67)式和$\|x_n\|<r$,矛盾. 所以当$n\in N_1$时,

$$\|x_n-M\omega\| > R_1. \tag{3.68}$$

现在我们来讨论α_n的最小值. 当$n\ge n_1$时. 有两种情况.

情况1. $\alpha_n \ge R_1$. 由(3.65)式显然.

情况2. $\alpha_n < R_1$, 存在$a_n\in[0,1]$,

$$\alpha_n = \min_{0\le t\le 1}[x_n(t)-M\omega(t)] = x_n(a_n)-M\omega(a_n) < R_1. \tag{3.69}$$

因为$\alpha_n = x_n(a_n)-M\omega(a_n) < R_1$, 由(3.68), 存在$c_n\in[0,1]$ (不失一般性设$a_n<c_n$) 使

得$x_n(c_n)=M\omega(c_n)+R_1$ 且当$a_n\le t\le c_n$时, $x_n(t)\le M\omega(t)+R_1$. 则当$t\in[a_n,c_n]$时,

$$F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))>a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+M. \tag{3.70}$$

事实上, 如果$t\in[a_n,c_n]$ 使$1/n\le x_n(t)-M\omega(t)\le R_1$, 则

$$\begin{aligned}F_n(t,x_n(t)-M\omega(t)) &= F(t,x_n(t)-M\omega(t))\\ &\ge a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+\tilde{g}_0(x_n(t)-M\omega(t))\\ &> a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+M,\end{aligned}$$

如果$t\in[a_n,c_n]$ 使$x_n(t)-M\omega(t)\le 1/n$, 则

$$\begin{aligned}F_n(t,x_n(t)-M\omega(t)) &= F(t,1/n)\ge a(t)/n+\tilde{g}_0(1/n)\\ &> a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+M.\end{aligned}$$

所以(3.70)成立.

由(3.63)($\lambda=1$) 来证明(3.70)式. 如果在$[a_n,c_n]$中存在脉冲点$t=t_k$, 设$a_n<t_{i+1}<t_{i+2}<\cdots<t_{i+j-1}<c_n$, 令$\overline{I}_{i+1}=[a_n,t_{i+1}],\overline{I}_{i+2}=(t_{i+1},t_{i+2}],\cdots,\overline{I}_{i+j-1}=(t_{i+j-2},t_{i+j-1}],\overline{I}_{i+j}=(t_{i+j-1},c_n]$, $(0\le t_i\le a_n\le t_k=t_{i+j-1}\le c_n\le p; i\ge 0, j\ge 0)$ 则, 当$t\in\overline{I}_{i+1}=[a_n,t_{i+1}]$,

$$\begin{aligned}x_n''(t)-M\omega''(t) &= -a(t)x_n(t)+F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))+a(t)/n-M[1-a(t)\omega(t)]\\ &> -a(t)x_n(t)+a(t)(x_n(t)-M\omega(t))+M+a(t)/n-M[1-a(t)\omega(t)]\\ &= a(t)/n\ge 0.\end{aligned}$$

因为当$t\in\overline{I}_{i+1}$时, $x_n'(a_n)-M\omega'(a_n)\ge 0$, $x_n'(t)-M\omega'(t)>0$, 函数$y_n:=x_n-M\omega$在$\overline{I}_{i+1}$上是严格增加的. 由$x_n'(t_{i+1}^-)-M\omega'(t_{i+1}^-)>0$ 和$x'(t_k^+)=x'(t_k^-)+I_k^{(n)}(x(t_k))>0, k=1,2,\cdots,p$知$x_n'(t_{i+1}^+)-M\omega'(t_{i+1}^+)>0$, 则当$t\in\overline{I}_{i+2}$ 时, $x_n'(t)-M\omega'(t)>0$函数$y_n:=x_n-M\omega$在$\overline{I}_{i+2}$上也是严格增加的, 依次类推函数$y_n:=x_n-M\omega$在$\overline{I}_k$上是严格单调增加的. 所以$x'(t_k^+)=x'(t_k^-)+I_k^{(n)}(x(t_k))>x'(t_k^-), k=1,2,\cdots,p$. 因此函数$y_n:=x_n-M\omega$在$[a_n,c_n]$上是单调增加的. 不妨用$\xi_n$ 来表示y_n在$[a_n,c_n]$上的反函数.

为了证明(3.63)式这里我们首先来说明当$n\in N_1$时,

$$x_n(t)-M\omega(t)\geq 1/n. \tag{3.71}$$

若不然, 假设存在$n\in N_1$ 使得$\alpha_n<1/n$. 则存在$a_n\leq b_n\leq c_n$) 使得$x_n(b_n)-M\omega(b_n)=1/n$ 且当$a_n\leq t\leq b_n$时, $x_n(t)-M\omega(t)\leq 1/n$; 当$b_n\leq t\leq c_n$时, $1/n\leq x_n(t)-M\omega(t)\leq R_1$.

将(3.63)($\lambda=1$)式两端同乘$x_n'(t)-M\omega'(t)$ 然后从b_n到c_n积分, 得

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{n}}^{R_1}F(\xi_n(y),y)dy &= \int_{b_n}^{c_n}F(t,x_n(t)-M\omega(t))(x_n'(t)-M\omega'(t))dt\\
&= \int_{b_n}^{c_n}F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))(x_n'(t)-M\omega'(t))dt\\
&= \int_{b_n}^{c_n}(x_n''(t)+a(t)x_n(t)-a(t)/n)(x_n'(t)-M\omega'(t))dt\\
&= \int_{b_n}^{c_n}x_n''(t)(x_n'(t)-M\omega'(t))dt+\int_{b_n}^{c_n}(a(t)x_n(t)-a(t)/n)(x_n'(t)-M\omega'(t))dt.
\end{aligned}$$

由$\|x_n\|<r$和$\|x_n'\|\leq H$, 知第二项是有界的. 第一项是

$$\left([x_n'(c_n)]^2-[x_n'(a_n)]^2\right)/2-M(x_n'(c_n)\omega'(c_n)-x_n'(a_n)\omega'(a_n))+M\int_{a_n}^{c_n}x_n'(t)\omega''(t)dt,$$

有界. 所以存在常数$L>0$ 使得

$$\int_{1/n}^{R_1}F(\xi_n(y),y)dy\leq L. \tag{3.72}$$

另一方面由(G_3)知, 可以选择充分大的$n_2\in N_1$, 当$n\in N_2=\{n_2,n_2+1,\cdots\}$时,

$$\int_{1/n}^{R_1}F(\xi_n(y),y)dy\geq\int_{1/n}^{R_1}g_0(y)dy>L.$$

所以当$n\in N_2$时, (3.71)成立.

最后我们证明情况2中(3.65)是正确的. 在(3.63) ($\lambda=1$)的两端同时乘以$x_n'(t)-$

$M\omega'(t)$ 从a_n 到c_n 积分,

$$\begin{aligned}\int_{\alpha_n}^{R_1} F(\xi_n(y),y)dy &= \int_{a_n}^{c_n} F(t,x_n(t)-M\omega(t))(x_n'(t)-M\omega'(t))dt \\ &= \int_{a_n}^{c_n} F_n(t,x_n(t)-M\omega(t))(x_n'(t)-M\omega'(t))dt \\ &= \int_{a_n}^{c_n} (x_n''(t)+a(t)x_n(t)-a(t)/n)(x_n'(t)-M\omega'(t))dt.\end{aligned}$$

与(3.72)式类似的证明可以得到上面的等式的右端是有界的,

$$\int_{\alpha_n}^{R_1} F(\xi_n(y),y)dy \le L'$$

另一方面, 当$n\in N_2$时, 由(G_3)式, 当$\alpha_n\to 0^+$时,

$$\int_{\alpha_n}^{R_1} F(\xi_n(y),y)dy \ge \int_{\alpha_n}^{R_1} g_0(y)dy + M(R_1-\alpha_n)\to +\infty.$$

所以存在常数$\delta>0$ 使得$\alpha_n\ge\delta$. 因此引理3.17证毕.

推论 3.18 令(3.35)中的$f(t,x)$ 如(3.59)式, 其中$\alpha\ge 1$, $\beta\ge 0$, $\gamma_k>0(k=1,2,\cdots,p)$, $B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k<1$, $b(t)$, $c(t)$, $\gamma(t)\in C[0,1]$ 都是非负函数, 对任意的t, $b(t)>0$, $e(t)\in C[0,1]$ 和$\mu>0$ 是正的常数. 则

(i) 如果$\beta<1$, 当$\mu>0$时, (3.35) 至少存在一个正周期解.

(ii) 如果$\beta\ge 1$, 当$0<\mu<\mu_*$ (其中μ_* 是某正常数)时, (3.35) 至少存在一个正周期解.

证明: 我们应用定理3.12令$M=e_0=\max_t|e(t)|$ 和

$$g(x)=b_0x^{-\alpha},\qquad h(x)=\mu c_0x^{\beta}+2e_0,\qquad \gamma(x)=\sum_{k=1}^{p}\gamma_k x$$

则条件(G_1)-(G_3) 满足. 条件(G_4) 为存在$r>\|\omega\|/\sigma$, 使得

$$\mu<\frac{(1-B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)r(\sigma r-M\|\omega\|)^{\alpha}/\|\omega\|-(b_0+2e_0r^{\alpha})}{c_0r^{\alpha+\beta}}.$$

所以当

$$0<\mu<\mu_*:=\sup_{r>M\|\omega\|/\sigma}\frac{(1-B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)r(\sigma r-M\|\omega\|)^\alpha/\|\omega\|-(b_0+2e_0r^\alpha)}{c_0r^{\alpha+\beta}}$$

时, (3.35)至少存在一个正周期解.

注意到当$\beta<1$时, $\mu_*=\infty$; 当$\beta\geq 1$时, $\mu_*<\infty$.

下面我们将利用锥不动点定理来证明(3.35)存在另一个解.

定理 3.13 如果条件(A)和(G_1)–(G_4)成立. 而且满足下面的两个条件:

(G_5) 在$(0,\infty)$上, 存在连续非负函数$g_1(x)$, $h_1(x)$, $\gamma_1(x)$使得

$$F(t,x)=f(t,x)+M\geq g_1(x)+h_1(x)\qquad \forall(t,x)\in[0,1]\times(0,\infty),$$

$$\sum_{k=1}^{p}I_k(x)\geq\gamma_1(x)\qquad \forall(t_k,x)\in[0,1]\times(0,\infty)$$

这里在$x\in(0,\infty)$上, $g_1(x)>0$是不增的$h_1(x)/g_1(x)$, $\gamma_1(x)$不减的;

(G_6) 存在正数$R>r$使得

$$R\leq\|\omega\|\sigma g_1(R)(1+h_1(\sigma R-M\|\omega\|)/g_1(\sigma R-M\|\omega\|))+A\gamma_1(\sigma R).$$

则除了定理3.12存在的正周期解x外, 方程(3.35)存在另一个周期解$\tilde{x}\in PC'[0,1]$并且$r<\|\tilde{x}+M\omega\|\leq R$.

证明: 由定理3.12的证明, 只需证方程(3.62)存在一个周期解$u\in PC'[0,1]$且$u(t)>M\omega(t)$和$r<\|u\|\leq R$.

令$X=PC'[J,R]$, K为X中的锥, 令$\Omega_1=\Omega_r$和$\Omega_2=\Omega_R$. 由(3.52)定义算子T: $K\cap(\overline{\Omega_2}/\Omega_1)\to K$,且由$F(t,x-M\omega(t))$代替$F(t,x)$. 由$K$的定义知, 对任意的$x\in K\cap(\overline{\Omega_2}/\Omega_1)$都有$0<\sigma r-M\|\omega\|\leq x(s)-M\omega(s)\leq R$. 所以在$K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中定义的不动点$T$就是(3.62)的正周期解. 因为条件$(G_5)$–$(G_6)$能够保证定理1.8中的条件(ii), 再由定理1.8和定理3.11的证明能够在$K\cap(\bar{\Omega}_2\backslash\Omega_1)$中得到不动点$T$. 最后, $\tilde{x}=u-M\omega$就是我们要找的(3.35)的正的脉冲周期解.

下面再来考虑推论3.15中的例子(3.59)式, 我们主要讨论$\beta>1$的情形. 假设$\forall t$,

$c(t) > 0$. 证明(G_5), 只需令

$$g_1(x) = b_1 x^{-\alpha}, \qquad h_1(x) = \mu c_1 x^{\beta}, \qquad \gamma_1(x) = \sum_{k=1}^{p} \gamma_k x.$$

条件(G_6)为

$$\mu \geq \frac{(1 - A\sum_{k=1}^{p}\gamma_k)R^{\alpha+1}/(\sigma\|w\|) - b_1}{c_1(\sigma R - M\|\omega\|)^{\alpha+\beta}}. \tag{3.73}$$

因为$\beta > 1$, 所以当$R \to +\infty$时, (3.73)的右端趋进于0. 所以, 对任意给定的$0 < \mu < \mu_*$, (这里μ_* 与推论3.15中的取值相同), 总可以找到充分大的$R \gg r$满足(3.73). 所以, (3.35) 存在另外的脉冲周期解$\bar{x}$ 使得$\|\bar{x} + M\omega\| > r$.

推论 3.19 如果(3.59)中对任意的t, $\beta > 1$, $b(t) > 0$, $c(t) > 0$, $\gamma_k > 0$ $k = 1, 2, \cdots, p$. 而且$B\sum_{k=1}^{p}\gamma_k < 1$. 则, 任意的$\mu$ 且$0 < \mu < \mu_*$, 对应方程(3.35)至少存在两个不同的脉冲周期解.

第四章　非线性生物动力系统中的脉冲问题

利用拓扑度的方法研究非自治一阶脉冲微分方程系统的周期解的存在性, 文献[12,13,85]已经有所讨论, 本章主要是对生态系统中的具体的互惠模型和具有功能反应的捕食模型进行具体的讨论.

4.1 具脉冲的广义互惠系统的脉冲周期解

利用拓扑度的方法可以研究非自治微分方程系统的周期解的存在性, 最近又有文献专门利用拓扑度的理论讨论脉冲微分方程, 本文则研究具有脉冲出生率和周期系数的互惠系统, 这个模型最初由May R M 在1976年提出[118],它的方程以如下形式给出:

$$\begin{cases} \dot{u}(t) = r_1 u(t)[1 - u(t)(a_1 + b_1 v(t))^{-1} - c_1 u(t)], \\ \dot{v}(t) = r_2 v(t)[1 - v(t)(a_2 + b_2 u(t))^{-1} - c_2 v(t)], \end{cases} \tag{K}$$

其中$r_i = b_i - d_i$ $(i = 1,2)$ 是内禀增长率, b_i, d_i 分别代表出生率和死亡率, a_i, b_i, c_i, b_i, d_i $(i = 1,2)$ 是周期为$\omega > 0$的连续函数. $u(t), v(t)$ 代表种群在时刻t的密度. 种群$v(t)$ 的存在有助于$u(t)$的增长, 换句话说, $v(t)$ 的存在增大了$u(t)$ 的环境容纳量, 反之亦然. 文[122,128]推广了模型(K)讨论了下面的更广义的互惠模型的周期解和概周期解的存在性.

$$\dot{y}_i(t) = y_i(t)[a_i(t) - c_i(t)y_i(t) - \frac{d_i(t)y_i(t)}{g_i(t) + \sum\limits_{j=1, i\neq j}^{n} e_j(t)y_j(t)}], (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{4.1}$$

在现实世界中, 种群的出生不是连续时间的而可以看作是脉冲式的行为, 有许多就动物表现为季节性的规律. 因此为了更精确地描述这种现象, 我们可以修

正模型(4.1)变为如下的脉冲微分方程:

$$
\begin{cases}
\dot{y}_i(t) = y_i(t)[a_i(t) - c_i(t)y_i(t) - \dfrac{d_i(t)y_i(t)}{g_i(t) + \sum\limits_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)y_j(t)}], \quad t \neq t_k, \ (i = 1,2,\cdots,n), \\
\Delta y_i(t)|_{t=t_k} = y_i(t_k^+) - y_i(t_k^-) = (b_{ik} + h_{ik})y_i(t), \qquad t = t_k, \ (k = 1,2,\cdots),
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

对于系统(4.2)我们假设:

(H_{41}) $b_{ik} \geq 0$ 表示种群y_i 在时刻t_k 的脉冲出生率; $h_{ik} \geq 0$ 表示种群y_i 在时刻t_k的脉冲收获率.

(H_{42}) $y_i(t_k^+)$ 和$y_i(t_k^-)$分别表示y_i 在t_k 时的左极限和右极限, 本文假设y_i 在t_k 是左连续的.

(H_{43}) 系数函数是连续非负的ω周期函数;

(H_{44}) 存在正整数q 使得$t_{k+q} = t_k + \omega, b_{i(k+q)} = b_{ik}$, 不妨假设$t_k \neq 0$ 且$[0,\omega] \cap \{t_k\} = \{t_1, t_2, \cdots, t_m\}$, 所以$q = m$.

对于系统(4.2), 作变换

$$
y_i(t) = exp\{x_i(t)\}, \tag{4.3}
$$

则(4.2)变为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i(t) &= [a_i(t) - c_i(t)exp\{x_i(t)\} - \dfrac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t) + \sum\limits_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)exp\{x_j(t)\}}], \quad t \neq t_k, \\
\Delta x_i(t)|_{t=t_k} &= x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = ln(1 + b_{ik} + h_{ik}), \quad t = t_k, \ (k = 1,2,\cdots m), \\
x_i(0) &= x_i(\omega), (i = 1,2,\cdots n).
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

为方便, 对于$i = 1,2,\cdots n$本节采用下列记号:

$$
\bar{f} := \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} f(s)ds, \quad \frac{\sum\limits_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik})}{\omega} + \bar{a}_i := r_i.
$$

对于一个脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t,x), t \in [0,\omega],\ t \neq t_k,\ k = 1,2,\cdots, \\ \Delta x(t)|_{t=t_k} = I_k(x(t_k^-)) = x(t_k^+) - x(t_k^-),\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (M)$$

其中$x \in R^n, f: R \times R^n \to R$ 是连续函数满足$f(t+\omega) = f(t,x); I_k: R^n \to R^n$ 连续，存在正整数q 使得$t_{k+q} = t_k + \omega, I_{k+q}(x) = I_k(x)$.

定义 4.1 如果$x: [0,\omega] \to R^n$ 是方程(M)的周期解需满足下列条件:
(i) $x(t)$ 在$t_k \cap [0,\omega]$ 是具有第一类不连续间断点的光滑函数, 在不连续间断点是左连续的;
(ii) $x(t)$ 满足方程(M), 且$x(t+\omega-0) = x(t-0), t \in R$.

引理 4.2 $R_+^n = \{(y_1 y_2, \ldots y_n)^T | y_i > 0, i = 1,2,\ldots n\}$ 关于系统(4.2)是正向不变的.

证明: 根据生物学意义,假设$y_i(0) > 0$, 即$(y_1(0), y_2(0), \ldots, (y_n(0))^T \in R_+^n$, 则易知命题得证.

为了利用第一章第二部分的重合度理论, 证明系统(4.2)周期解的存在性, 首先要把问题纳入到引理的框架中, 找到一个适当的有界集. 令

$$C^1[0,\omega; t_1, t_2, \cdots, t_m] = \left\{ x: [0,\omega] \to R^2: \begin{array}{l} \dot{x}(t)\text{在 } t \neq t_1, t_2, \cdots, t_m\text{连续}; \\ \dot{x}(t+0), \dot{x}(t-0)\text{在}t = t_1, t_2, \cdots, t_m\text{存在}; \\ \dot{x}(t_k) = \dot{x}(t_k - 0), k = 1,2,\cdots,m. \end{array} \right\}$$

$X = \{x \in C^1[0,\omega; t_1, t_2, \cdots, t_m] | x(0) = x(\omega)\}$, 具有范数$\|x\|_{C^1} = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} \|x\|, x \in X$, 其中$\|\cdot\|$为$R^n$ 中的任意范数.

$Z = X \times R^{n(m+1)}$, 取范数$\|z\|_Z = \|x\|_{C^1} + \|y\|$, 其中$z = (x,y) \in Z, x \in X, y \in R^{nm}$.

易知X, Z分别在范数$\|\cdot\|_{C^1}, \|\cdot\|_Z$下是Banach空间.

令

$$domL = \{x \in C^{(1)}[0,\omega; t_1, \ldots t_m] | x(0) = x(\omega)\},$$

$$L: domL \longrightarrow Z, Lx = (\dot{x}, \Delta x(t_1), \ldots \Delta x(t_m)),$$

$$N: X \longrightarrow Z.$$

$$KerL = \{x \in X | x = h \in R^n\},$$

$$ImL = \{z = (f, c_1, c_2, \cdots c_m) \in Z | \int_0^{\omega} f(s)ds + \sum_{k=1}^{m} c_k = 0\},$$

$$Nx = ((a_i(t) - c_i(t)d^{x_i(t)} - \frac{e_i(t)e^{x_i(t)}}{g_i(t) + \sum_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)e^{x_j(t)}})_{n\times 1}, (ln(1 + b_{ik} + h_{ik}))_{nm}), x \in X.$$

则, ImL 为Z, L中的指标为零的Fredholm映射. 定义

$$Px = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x(t)dt, x \in X;$$

$$Qz = Q(f, c_1, \ldots c_m) = (\frac{1}{\omega}[\int_0^{\omega} f(s)ds + \sum_{(k=1)}^{m} c_k], 0, \ldots 0).$$

易知P 和Q 是连续的投影算子, 且

$$ImP = kerL,\ kerQ = ImL = Im(I - Q).$$

令$Z = (f, c_1, \ldots c_m) \in ImL$, 存在$x \in DomL \subset X$, 使得

$$\dot{x}(t) = f(t), t \neq t_k,$$

$$\Delta x(t) = c_k, t = t_k, k = 1, 2, \ldots m$$

则

$$x(t) = \int_0^{t} f(s)ds + \sum_{t>t_k} c_k + x(0),$$

由$x(t) \in KerP$, 则$\int_0^{\omega} x(s)ds = 0$. 所以

$$\int_0^{\omega}\int_0^{t} f(s)dsdt + \int_0^{\omega}\sum_{t>t_k} c_k dt + \omega x(0) = 0$$

所以

$$x(t)=\int_0^t f(s)ds+\sum_{t>t_k}c_k-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t f(s)dsdt-\sum_{k=1}^{m}c_k+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m}c_kt_k$$

$$KpZ=\int_0^t f(s)ds+\sum_{t>t_k}c_k-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t f(s)dsdt-\sum_{k=1}^{m}c_k+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m}c_kt_k$$

$$QNx=((\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}a_i(t)dt-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(t)exp\{x_j(t)\}}dt$$

$$-\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}c_i(t)exp\{x_i(t)\}dt+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{n\times 1},(0,0,\ldots 0))_{n\times m}),x\in X.$$

$$K_p(I-Q)Nx=(\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik})+\int_0^t[a_i(s)-c_i(s)exp\{x_i(s)\}-$$

$$\frac{d_i(s)exp\{x_i(s)\}}{g_i(s)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(s)exp\{x_j(s)\}}]ds)_{n\times 1}-(\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}\int_0^t[a_i(s)-c_i(s)exp\{x_i(s)\}-$$

$$\frac{d_i(s)exp\{x_i(s)\}}{g_i(s)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(s)exp\{x_j(s)\}}]dsdt+\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik})_{n\times 1}-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik})t_k)_{n\times 1}$$

$$-((\frac{t}{\omega}-\frac{1}{2})\int_0^{\omega}[a_i(s)-c_i(s)exp\{x_i(s)\}-\frac{d_i(s)exp\{x_i(s)\}}{g_i(s)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(s)exp\{x_j(s)}$$

$$+\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{n\times 1}]ds)_{n\times 1}.$$

显然QN and $K_P(I-Q)N$ 是连续算子. 对于有界开集$\Omega\subset X$, $QN(\bar{\Omega})$ 有界, 利用Arzela-Ascoli 定理易证, $\overline{K_P(I-Q)N(\Omega)}$ 是紧致集, 因此N 在$\bar{\Omega}$ 上是L - 紧的.

定理 4.1 在假设条件(H_{41})-(H_{44})下, 系统(4.2) 至少存在一个正的ω 周期解.

证明: 下面我们需要寻找一个适当的有界开集Ω 满足定理1.12 的条件. 相应于算子方程

$$Lx=\lambda Nx,\lambda\in(0,1),$$

我们有

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) & = \lambda[a_i(t) - c_i(t)exp\{x_i(t)\} - \dfrac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t) + \sum_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)exp\{x_j(t)\}}] \quad ,t \neq t_k \\ \Delta x_i(t)|_{t=t_k} & = \lambda ln(1 + b_{ik} + h_{ik}), \quad t = t_k, \quad (k = 1,2,\cdots m) \\ x_i(0) & = x_i(\omega), \quad (i = 1,2,\cdots n). \end{cases} \tag{4.5}$$

设$x(t) = (x_1(t), x_2(t)\cdots x_n(t)) \in X$ 为系统(4.5)的对应于某个$\lambda \in (0,1)$的解. 对(4.5)式从$[0,\omega]$ 积分,

$$\int_0^\omega [a_i(t) - c_i(t)exp\{x_i(t)\} - \frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t) + \sum_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)exp\{x_j(t)\}}]dt + \sum_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik}) = 0$$

即

$$\int_0^\omega a_i(t)dt + \sum_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik}) = \int_0^\omega [c_i(t)exp\{x_i(t)\} - \frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t) + \sum_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)exp\{x_j(t)\}}]dt \tag{4.6}$$

由(4.5) 和(4.6) 得

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |\dot{x}_i(t)| dt \quad \leq & \quad \int_0^\omega a_i(t)dt + \int_0^\omega |c_i(t)exp\{x_j(t)\} + \frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t) + \sum_{j=1,i\neq j}^{n} e_j(t)exp\{x_j(t)\}}| dt \\ & \quad + \sum_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik}) \\ = & \quad 2(\bar{a}_i\omega + \sum_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik})) \\ =: & \quad 2r_i\omega. \end{aligned} \tag{4.7}$$

由$x(t) \in X$, 知存在$\xi_i \in [0,\omega]$ 使得

$$x_i(\xi_i) = \min_{t\in[0,\omega]} x_i(t), i = 1,2,\cdots n \tag{4.8}$$

由(4.6)和(4.8)式

$$r_i\omega =: \bar{a}_i\omega + \sum_{k=1}^{n} ln(1 + b_{ik} + h_{ik}) \leq \int_0^\omega c_i(t)exp\{x_j(t)\}dt \leq \bar{c}_i\omega exp\{x_i(\xi_i)\}$$

所以

$$x_i(\xi_i) \le ln\{\frac{r_i}{\overline{c_i}}\}, \tag{4.9}$$

由(4.9)和(4.7)式

$$x(t) \le x_i(\xi_i) + \int_0^\omega |\dot{x}_i(t)|dt \le ln\{\frac{r_i}{\overline{c_i}}\} + 2r_i\omega = L_i^+ \tag{4.10}$$

另一方面, 存在$\eta_i \in [0,\omega]$ 使得

$$x_i(\eta_i^+) = \sup_{t\in[0,\omega]} x_i(t) \tag{4.11}$$

由上面的公式, 当η_i 不是脉冲点时, 有$x_i(\eta_i^+) = x_i(\eta_i)$; 当$\eta_i = t_k$ 是脉冲点时, $x_i(\eta_i^+) = x_i(t_k^+)$ 由(4.6)和(4.10)式

$$\begin{aligned} r_i\omega &= \overline{a_i}\omega + \sum_{k=1}^{n} ln(1 + b_{ik} + h_{ik}) \le \int_0^\omega [c_i(t)exp\{x_i(t)\} + \frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t)}]dt \\ &\le \int_0^\omega [c_i(t)exp\{x_i(\eta^+)\} + \frac{d_i(t)exp\{x_i(\eta_i^+)\}}{g_i(t)}]dt \\ &= [\overline{c_i} + \overline{(\frac{d_i}{g_i})}]\omega exp\{x_i(\eta_i^+)\} \end{aligned}$$

所以

$$x_i(\eta_i^+) \ge ln\{\frac{r_i}{\overline{c_i} + \overline{(\frac{d_i}{g_i})}}\}, \tag{4.12}$$

$$x_i(t) \ge x_i(\eta_i^+) - \int_0^\omega |\dot{x}_i(t)|dt \ge ln\{\frac{r_i}{\overline{c_i} + \overline{(\frac{d_i}{g_i})}}\} - 2r_i\omega =: L_i^- \tag{4.13}$$

由(4.10)和(4.13)式

$$\sup_{t\in[0,\omega]} |x_i(t)| \le \sup\{|L_i^+|, |L_i^-|\} =: H_i \tag{4.14}$$

$$\|x\| \le \sum_{i=1}^{n} (H_i^2)^{\frac{1}{2}} =: M_1$$

显然, H_i 的选取与λ 无关, 下面我们来考虑代数方程

$$(\int_0^{\omega}[a_i(t)-c_i(t)exp\{x_i(t)\}-\frac{\mu d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t)+\sum_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(t)exp\{x_j(t)\}}]dt$$

$$+\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{n\times 1},(0,0,\cdots,0)=0. \tag{4.15}$$

$\mu\in[0,1]$ 为参数. 利用前面类似的方法得$\bar{L_i^-}\leq x_i(t)\leq\bar{L_i^+}$ 其中

$$\bar{L_i^-}=ln\overline{\{\frac{r_i}{\bar{c_i}+(\frac{d_i}{g_i})}\}}$$

$$\bar{L_i^+}=ln\overline{\{\frac{r_i}{\bar{c_i}}\}}$$

令$\bar{H_i}=\sup\{|\bar{L_i^-}|,|\bar{L_i^-}|\}<\bar{H_i}$ 且

$$\|x\|\leq\sum_{i=1}^{n}(\bar{H_i^2})^{\frac{1}{2}}=:M_2, \tag{4.16}$$

所以M_2 的选取与μ无关.且$\|x\|\leq M_2$ 取$M>\max\{M_1,M_2\}$记

$$\Omega:=\{x(t)=(x_1,x_2,\cdots x_n)^T\in X:\|x\|\leq M,x(t_k+0)\in\Omega,k=1,2,\cdots m\}$$

显然对于$x\in\partial\Omega$ 和$\lambda\in(0,1)$ 有$Lx\neq\lambda Nx$ 即Ω 满足定理1.12的条件(a). 当$x\in\partial\Omega\cap kerL=\partial\Omega\cap R^n$, x 是R^n 中的常值向量且$\|x\|=M$ 因此,

$$\begin{aligned} QNx &= ((\frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}(a_i(t)-c_i(t)exp\{x_i(t)\}-\frac{d_i(t)exp\{x_i(t)\}}{g_i(t)+\sum\limits_{j=1,i\neq j}^{n}e_j(t)exp\{x_j(t)\}})dt \\ &+ \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m}ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{n\times 1},(0,0,\cdots,0)\neq 0 \end{aligned} \tag{4.17}$$

再构造如下同伦映射:

$$h_\mu(x)=\mu QNx+(1-\mu)Gx,\mu\in[0,1] \tag{4.18}$$

其中$Gx = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega}(a_i(t) - c_i(t)exp\{x_i(t)\})dt + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^{m} ln(1 + b_{ik} + h_{ik})$ 对于$\mu \in [0,1], h_\mu(\partial\Omega \cap KerL) \neq 0$, 所以据同伦不变性有

$$deg(JQN, \Omega \cap KerL, 0) = deg(G, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$$

至此我们已经证明Ω 满足定理1.12的所有条件, 则(4.4) 至少有一个ω 周期解. $x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t), \cdots x_n^*(t))^T$. 由$y_i^*(t) = \exp\{x_i^*(t)\}$, 知$y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), \cdots y_n^*(t))^T$ 是(4.2) 的Ω 周期解.

4.2 具有Holling III 类功能反应捕食者食脉冲系统

文[121]讨论了下面的系统正周期解的存在性

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t)\{a_1(t) - a_{11}(t)y_1(t) - \dfrac{a_{12}(t)y_1(t)y_2(t)}{a_{13}^2(t) + y_1^2(t)}\} \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t)\{-a_2(t) - a_{21}(t)y_2(t) + \dfrac{a_{22}(t)y_1^2(t)}{a_{13}^2(t) + y_1^2(t)}\} \end{cases}$$

其中$y_1(t)$和$y_2(t)$分别表示捕食者和食饵的密度。

现在，我们考虑脉冲微分方程

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_1(t)\{a_1(t) - a_{11}(t)y_1(t) - \dfrac{a_{12}(t)y_1(t)y_2(t)}{a_{13}^2(t) + y_1^2(t)}\} & t \neq t_k,\ (k = 1, 2, \cdots) \\ \dot{y}_2(t) = y_2(t)\{-a_2(t) - a_{21}(t)y_2(t) + \dfrac{a_{22}(t)y_1^2(t)}{a_{13}^2(t) + y_1^2(t)}\} & t \neq t_k,\ (k = 1, 2, \cdots) \\ \Delta y_i(t)|_{t=t_k} = y_i(t_k^+) - y_i(t_k^-) = (b_{ik} + h_{ik})y_i(t), & t = t_k,\ (k = 1, 2, \cdots m), \end{cases} \tag{4.19}$$

这里b_{ik} 表示种群$y_i(t)$ 在t_k时的出生率, h_{ik} 表示种群$y_i(t)$ 在t_k时的收获率($h_{ik} < 0$), 投放率($h_{ik} > 0$)($i = 1, 2; k = 1, 2, \cdots m$)，$t_k$ 称为脉冲点。

本节, 我们假设下列条件满足

(H'_{41}) $a_i(t)(i = 1, 2), a_{ij}(t), (i = 1, 2; j = 1, 2, 3)$ 具有相同周期ω的连续正周期函数$b_{ik} > 0$和$b_{ik} + h_{ik} \geq 0(i = 1, 2; k = 1, 2, \cdots m)$;

(H'_{42})存在一个正整数q 使得$t_{k+q} = t_k + \omega, b_{i(k+q)} + h_{i(k+q)} = b_{ik} + h_{ik} \geq 0$ 不失一般性,我们假定$t_k \neq 0(i = 1, 2; k = 1, 2, \cdots m)$ 和$[0, \omega] \cap \{t_k\} = \{t_1, t_2, \ldots t_m\}$, 因此, $q = m$.

首先, 令

$$y_i(t)=exp\{x_i(t)\},(i=1,2) \tag{4.20}$$

则系统(4.19) 化为

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t)=[a_1(t)-a_{11}(t)exp\{x_1(t)\}-\dfrac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}] \ \ t\neq t_k, \\ \dot{x}_2(t)=[-a_2(t)-a_{21}(t)exp\{x_1(t)\}+\dfrac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}] \ \ t\neq t_k \\ \Delta x_i(t)|_{t=t_k}=x_i(t_k^+)-x_i(t_k^-)=ln(1+b_{ik}+h_{ik}), \ \ t=t_k,(i=1,2;k=1,2,\cdots m) \\ x_i(0)=x_i(\omega), \ \ (i=1,2) \end{cases} \tag{4.21}$$

$x_i(t)(i=1,2)$在间断点处是左连续的.

引理 4.3 $R_+^2=\{(y_1,y_2)|y_i>0,i=1,2,\}$ 是系统(4.19)的正不变集.

考虑系统(4.19)的生物学意义, 我们规定$y_i(t)>0$. 结论显然成立.

引理 4.4 $x^*(t)$ 是系统(4.21)的ω 周期正解, 则$ln\{x^*(t)\}=(ln\{x_1^*(t)\},ln\{x_2^*(t)\})$是系统(4.19)的$\omega$ 周期正解.

我们将利用连续定理证明主要结论. 为此, 我们需要引入一些函数空间。令

$$C^1[0,\omega;t_1,\dots t_m]=\{x:[0,\omega]\longrightarrow R^2| \begin{array}{ll} \dot{x}(t) & 在\ t\neq t_1,t_2,\dots t_m\ 连续; \\ \dot{x}(t+0) & 和\ \dot{x}(t-0)\ 在\ t\neq t_1,t_2,\dots t_m\ 处存在; \\ \dot{x}(t_k) & =\dot{x}(t_k-0),k=1,2,\dots m. \end{array}\}$$

$$X=\{X\in C^1[0,\omega,t_1;\dots t_m]|x(0)=x(\omega),\|x\|_c=\sup_{t\in[0,\omega]}\|x\|,x\in X\}$$

则X 是具有范数$\|\cdot\|_c$的Banach 空间，且

$$Z=X\times R^{2m},\|z\|_z=\|x\|_c+\|y\|,x\in X,y\in R^{2m}.$$

故Z是具有范数$\|\cdot\|_z$的Banch 空间。

令

$$DomL=\{x\in C^1[0,\omega;t_1,\dots t_m]|x(0)=x(\omega)\},$$

$$L:DomL\longrightarrow Z,Lx=(\dot{x},\Delta x(t_1),\dots\Delta x(t_m)),$$

$$N: X \longrightarrow Z.$$

$$KerL = \{x \in X | x = h \in R^2\},$$

$$ImL = \{z = (f, c_1, c_2, \cdots c_m) \in Z | \int_0^{\omega} f(s)ds + \sum_{k=1}^{m} c_k = 0\},$$

$$f_1(t) = [a_1(t) - a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} - \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t) + x_2(t)\}}{a_{13}^2(t) + exp\{2x_1(t)\}}],$$

$$f_2(t) = [-a_2(t) - a_{21}(t)exp\{x_2(t)\} + \frac{a_{21}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t) + exp\{2x_1(t)\}}],$$

$$f(t) = (f_1(t), f_2(t))^T.$$

$$Nx = ((f_i(t))_{2\times1}, (ln(1 + b_{ik} + b_{ik}))_{2\times m}, x \in X(i = 1, 2; k = 1, 2, \cdots m)$$

所以, ImL 在Z中是闭的，故L是指标为零的Fredholm 映射定义

$$Px = \frac{1}{\omega}\int_0^{\omega} x(t)dt, x \in X;$$

$$Qz = Q(f, c_1, \ldots c_m) = (\frac{1}{\omega}[\int_0^{\omega} f(s)ds + \sum_{(k=1)}^{m} c_k], 0, \ldots 0).$$

显然算子P 和Q 是连续投影并使得

$$ImP = KerL,\ KerQ = ImL = Im(I - Q).$$

因此L的逆映射K_p存在. 令$Z = (f, c_1, \ldots c_m) \in ImL$,存在$x \in DomL \subset X$,满足

$$\dot{x}(t) = f(t), t \neq t_k,$$

$$\Delta x(t_k) = c_k, t = t_k, k = 1, 2, \ldots m$$

则

$$x(t) = \int_0^t f(s)ds + \sum_{t > t_k} c_k + x(0),$$

因为$x(t)\in KerP$,所以有$\int_0^\omega x(s)ds=0$. 则

$$\int_0^\omega\int_0^t f(s)dsdt+\int_0^\omega\sum_{t>t_k}c_kdt+\omega x(0)=0$$

则

$$x(t)=\int_0^t f(s)ds+\sum_{t>t_k}c_k-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f(s)dsdt-\sum_{k=1}^m c_k+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^m c_kt_k.$$

$$K_pz=\int_0^t f(s)ds+\sum_{t>t_k}c_k-\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f(s)dsdt-\sum_{k=1}^m c_k+\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^m c_kt_k$$

$$QNx=((\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_i(t)dt+\frac{1}{\omega}ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{2\times1},(0,0,\ldots0))_{2\times m}),x\in X.(i=1,2;k=1,2,$$

$$K_p(I-Q)Nx=(\sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik})+\int_0^t f_i(s)ds)_{2\times1}$$

$$-(\frac{1}{\omega}\int_0^\omega\int_0^t f_i(s)dsdt+\sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik})_{2\times1}-\frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik})t_k)_{2\times1}$$

$$-((\frac{t}{\omega}-\frac{\omega-1}{2\omega})\int_0^\omega f_i(s)ds+\sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{2\times1}]ds)_{2\times1}.$$

显然，QN 和$K_p(I-Q)N$ 是连续算子. 利用Arzela-Ascoli 定理, 不难证明$QN(\bar{\Omega}),K_p(I-Q)N(\bar{\Omega})$ 对任意$\Omega\subset X$中的有界开集是相对列紧的. 因此, N 在$\bar{\Omega}$ 上是L-紧的.

定理 4.2 假设条件$(H'_{41})(H'_{42})$成立且满足

$$r_2>\bar{a}_2,\ r_1>\overline{(\frac{a_{12}}{a_{13}^2})}e^{L_1^+}e^{L_2^+},\ \overline{(\frac{a_{22}e^{2L_1^-}}{a_{13}^2+e^{2L_1^+}})}>\bar{a}_2,$$

则方程(4.19)至少存在一个ω正周期解.

证明: 现在我们需要找一个合适的有界开集$\Omega\subset X$，来满足定理1.12的要求. 考虑

算子方程

$$Lx = \lambda Nx, \quad \lambda \in (0,1)$$

有

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \lambda[a_1(t) - a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} - \dfrac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}] & t \neq t_k, \\ \dot{x}_2(t) = \lambda[-a_2(t) - a_{21}(t)exp\{x_1(t)\} + \dfrac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}] & t \neq t_k \\ \Delta x_i(t)|_{t=t_k} = x_i(t_k^+) - x_i(t_k^-) = \lambda ln(1+b_{ik}+h_{ik}), \ t = t_k, \ (i=1,2; k=1,2,\cdots m), \\ x_i(0) = x_i(\omega), \ (i=1,2). \end{cases} \tag{4.22}$$

假定$x(t)=(x_1(t),x_2(t))\in X$是系统(4.22)的解。$\lambda\in(0,1)$,将(4.22)在$[0,\omega]$积分得

$$\int_0^\omega [a_1(t) - a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} - \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{1k}+h_{1k}) = 0$$

$$\int_0^\omega [-a_2(t) - a_{21}(t)exp\{x_1(t)\} + \frac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{2k}+h_{2k}) = 0$$

即

$$\int_0^\omega a_1(t)dt + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik}) = \int_0^\omega [a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} + \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt$$

$$\int_0^\omega a_2(t)dt + \int_0^\omega a_{21}(t)exp\{x_2(t)\}dt = \sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik}) + \int_0^\omega \frac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt$$

又

$$\begin{aligned} \int_0^\omega |\dot{x}_1(t)|dt &\leq \int_0^\omega a_1(t)dt + \int_0^\omega |a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} + \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}|dt \\ &\quad + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{1k}+h_{1k}) \\ &= 2(\overline{a}_1\omega + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{1k}+h_{1k})) \\ &=: 2r_1\omega. \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}\int_0^\omega |\dot{x}_2(t)|dt &\le |\int_0^\omega a_2(t)dt + \int_0^\omega a_{21}(t)exp\{x_1(t)\}dt| + |\int_0^\omega \frac{a_{22}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}dt| \\ &\quad + |\sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k})| \\ &\le 2(\int_0^\omega |a_{22}(t)|dt + \sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k})) \\ &= 2(\bar{a}_{22}\omega + \sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k})) \\ &=: 2r_2\omega.\end{aligned} \tag{4.24}$$

因为$x(t)\in X$,所以存在$\xi_i\in[0,\omega]$ 使得

$$x_i(\xi_i) = \min_{t\in[0,\omega]} x_i(t), (i=1,2) \tag{4.25}$$

由(4.25)和(4.23)

$$r_1\omega =: \bar{a}_1\omega + \sum_{k=1}^{n} ln(1+b_{1k}+h_{1k}) \ge \int_0^\omega a_{11}(t)exp\{x_1(t)\}dt \ge \bar{a}_{11}exp\{x_1(\xi_1)\}\omega$$

所以

$$x_1(\xi_1) \le ln\{\frac{r_1}{\bar{a}_{11}}\}, \tag{4.26}$$

由(4.26)和(4.24)得

$$x_1(t) \le x_1(\xi_1) + \int_0^\omega |\dot{x}_1(t)|dt \le ln\{\frac{r_1}{\bar{a}_{11}}\} + 2r_1\omega = L_1^+ \tag{4.27}$$

类似的方法得

$$\bar{a}_2\omega \le \int_0^\omega [-a_{21}(t)exp\{x_2(t)\} + a_{22}(t)]dt + \sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k})$$

$$\le \int_0^\omega [-a_{21}(t)exp\{x_2(\xi_2)\} + a_{22}(t)]dt + \sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k})$$

$$\le (-\bar{a}_{21}exp\{x_2(\xi_2)\} + \bar{a}_{22})\omega + \sum_{k=1}^{m} ln(1+b_{2k}+h_{2k}) \le (-\bar{a}_{21}exp\{x_2(\xi_2)\} + r_2)\omega$$

则

$$x_2(\xi_2) \le ln(\frac{r_2-\bar{a}_2}{\bar{a}_{21}})$$

故

$$x_2(t) \le x_2(\xi_2) + \int_0^{\omega} |\dot{x}_2(t)|dt \le ln(\frac{r_2-\bar{a}_2}{\bar{a}_{21}}) + 2r_2\omega = L_2^+ \tag{4.28}$$

另一方面, 存在$\eta_i \in [0,\omega]$ 满足

$$x_i(\eta_i^+) = \sup_{t\in[0,\omega]} x_i(t) \tag{4.29}$$

由以上公式, 如果η_i 不是脉冲点, 我们得$x_i(\eta_i^+) = x_i(\eta_i)$ 如果$\eta_i = t_k$ 是脉冲点, 我们得$x_i(\eta_i^+) = x_i(t_k^+)$ 由(4.23) 和(4.27)得到下列结果:

$$\begin{aligned} r_1\omega &= \bar{a_1}\omega + \sum_{k=1}^{n} ln(1+b_{1k}+h_{2k}) \le \int_0^{\omega}[a_{11}(t)exp\{x_1(t)\} + \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)}]dt \\ &\le \int_0^{\omega}[a_{11}(t)exp\{x_1(\eta^+)\} + \frac{a_{12}(t)exp\{x_1(t)+x_2(t)\}}{a_{13}^2(t)}]dt \\ &= [\bar{a}_{11}exp\{x_1(\eta^+)\} + \overline{(\frac{a_{12}}{a_{13}^2})}e^{L_1^+}e^{L_2^+}]\omega \end{aligned}$$

即

$$x_1(\eta^+) \ge ln\{\frac{r_1 - \overline{(\frac{a_{12}}{a_{13}^2})}e^{L_1^+}e^{L_2^+}}{\bar{a}_{11}}\}$$

从而

$$\begin{aligned} x_1(t) &\ge x_1(\eta_1^+) - \int_0^{\omega}|\dot{x}_1(t)|dt \\ &\ge \ln\{\frac{r_1-\overline{(\frac{a_{12}}{a_{13}^2})}e^{L_1^+}e^{L_2^+}}{\bar{a}_{11}}\} - 2r_1\omega \\ &=: L_1^- \end{aligned} \tag{4.30}$$

又

$$\begin{aligned} \bar{a_2}\omega &= \int_0^{\omega}[-a_{21}(t)exp\{x_2(t)\} + \frac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt + \sum_{k=1}^{n} ln(1+b_{1k}+h_{2k}) \\ &\ge \int_0^{\omega}[-a_{21}(t)exp\{x_2(\eta_2^+)\} + \frac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t)+exp\{2x_1(t)\}}]dt \\ &\ge \{-\bar{a}_{21}exp\{x_2(\eta_2^+)\} + \overline{(\frac{a_{22}e^{2L_1^-}}{a_{13}^2+e^{2L_1^+}})}\}\omega \end{aligned}$$

即

$$x_2(\eta_2^+) \geq ln\{\frac{\overline{(\frac{a_{22}e^{2L_1^-}}{a_{13}^2+e^{2L_1^+}})} - \bar{a}_2}{\bar{a}_{21}}\}$$

从而

$$x_2(t) \geq x_2(\eta_2^+) - \int_0^\omega |\dot{x}_i(t)| dt \geq ln\{\frac{\overline{(\frac{a_{22}e^{2L_1^-}}{a_{13}^2+e^{2L_1^+}})} - \bar{a}_2}{\bar{a}_{21}}\} - 2r_2\omega =: L_2^- \qquad (4.31)$$

由(4.27)和(4.31)得

$$\sup_{t\in[0,\omega]} |x_i(t)| \leq \sup\{|L_i^+|, |L_i^-|\} =: H_i \qquad (4.32)$$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n (H_i^2)^{\frac{1}{2}} =: M_1$$

显然H_i不依赖于λ, 现在，考虑下列代数方程

$$(\int_0^\omega [f_i(t)]dt + \sum_{k=1}^m ln(1+b_{ik}+h_{ik}))_{2\times 1}, (0,0,\cdots,0) = 0 \qquad (4.33)$$

对于参数$\mu \in [0,1]$，利用前面类似的估值方法，得$\bar{L}_i^- \leq x_i(t) \leq \bar{L}_i^+$ 这里

$$\bar{L}_1^- = ln\{\frac{r_1 - \overline{(\frac{a_{12}}{a_{13}^2})} e^{\bar{L}_1^+} e^{\bar{L}_2^+}}{\bar{a}_{11}}\}$$

$$\bar{L}_2^- = ln\{\frac{\overline{(\frac{a_{22}e^{2L_1^-}}{a_{13}^2+e^{2L_1^+}})} - \bar{a}_2}{\bar{a}_{21}}\}$$

$$\bar{L}_1^+ = ln\{\frac{\bar{r}_1}{\bar{a}_{11}}\}$$

$$\bar{L}_1^+ = ln\{\frac{\bar{r}_2 - \bar{a}_2}{\bar{a}_{21}}\}$$

这里

$\bar{H}_i = sup\{|\bar{L}_i^-|, |\bar{L}_i^-|\}, \bar{H}_i$ 是独立的，且满足

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n (\bar{H}_i^2)^{\frac{1}{2}} =: M_2, \qquad (4.34)$$

所以M_2不依赖于μ.这就证明了(4.32)的所有解满足$\|x\| \le M_2$ 令$M > \max\{M_1, M_2\}$并且记

$$\Omega := \{x(t) = (x_1, x_2)^T \in X : \|x\| \le M, x(t_k + 0) \in \Omega, k = 1, 2, \cdots m\}$$

显 然$Lx = \lambda Nx$ ，$x \in \partial\Omega$ 和$\lambda \in (0,1)$ 因 此Ω 满 足 定 理1.12的 条 件(a) 当$x \in \partial\Omega \cap kerL = \partial\Omega \cap R^2, x$ 是R^2中，具有范数$\|x\| = M$的常数向量，则

$$QNx = ((\frac{1}{\omega}\int_0^\omega f_i(s)ds + ln(1 + b_{ik} + h_{ik}))_{2\times1}, (0, 0, \cdots, 0) \tag{4.35}$$

现在，我们考虑同伦

$$h_\mu(x) = \mu QNx + (1 - \mu)Gx, \mu \in [0, 1] \tag{4.36}$$

这里

$$Gx = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (a_1(t) - a_{11}(t)exp\{x_1(t)\})dt + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^m ln(1 + b_{1k} + h_{1k}) \\ \frac{1}{\omega}\int_0^\omega (-a_2(t) - a_{21}(t)exp\{x_2(t)\} + \frac{a_{22}(t)exp\{2x_1(t)\}}{a_{13}^2(t) + exp\{2x_1(t)\}})dt + \frac{1}{\omega}\sum_{k=1}^m ln(1 + b_{2k} + h_{2k}) \end{pmatrix}$$

我们知道$0 \notin h_\mu(\partial\Omega \cap KerL)$ $\mu \in [0, 1]$并且注意到$J = I$, 因此，由同伦不变性得

$$deg(JQN, \Omega \cap KerL, 0) = deg(G, \Omega \cap KerL, 0) \neq 0$$

现 在， 我 们 已 经 证 得Ω满 足 定 理1.12的 所 有 条 件， 故(4.21)在$\bar{\Omega}$ 内 至 少 存 在 一 个ω周 期 解$x^*(t) = (x_1^*(t), x_2^*(t) \cdots x_n^*(t))^T$ 令$y_i^*(t) = \exp\{x_i^*(t)\}$,则$y^*(t) = (y_1^*(t), y_2^*(t), \cdots y_n^*(t))^T$ 是方程(4.19)的Ω周期解，证毕。

第五章　生物资源的最优脉冲开发策略

生物资源是一种可更新的自然资源，能够根据自身的特点借助于繁殖、生长而不断的进行自我更新，保持一个稳定的数量. 如果对其进行合理的利用和科学的管理，就会取之不尽用之不竭. 如果采取掠夺式的过度开发，资源将会遭到破坏，甚至枯竭. 当然对生物资源不加以利用，听之任之自生自灭或不充分利用，并不一定使资源增加，而是徒然一种浪费. 因此科学的开发与管理生物资源是非常重要的. 可更新资源的开发与管理，不仅要考虑到当前的高产，而且应考虑到保持生态平衡以保证长期的高产；不仅考虑到产量的多少，还应考虑到投入产出所获得的经济利润.

生物资源的优化利用问题是可持续发展问题的一个重要组成部分，历来受到学术界的重视. 国内外已有很深入的研究工作，取得了一定的成果. 但远未系统化仍有大量的问题有待进一步的研究解决.

对于自治的logistic 方程

$$\dot{x} = rx(1-\frac{x}{K}),\ \ x(t_0) = x_0 \tag{5.1}$$

其中$x(t)$ 为生物种群在t 时刻的种群密度，r, K为正常数，分别表示种群的内禀增长率和环境的最大容纳量.

当收获率为$h(t)$=常数和$h(t) = Ex$ (E为捕获努力量) 相应的捕获方程为

$$\dot{x} = rx(1-\frac{x}{K}) - h, \tag{5.2}$$

$$\dot{x} = rx(1-\frac{x}{K}) - Ex, \tag{5.3}$$

文[130], Clark 在单位捕获努力量的假定下，分别对(5.2)(5.3)，以最大可持续均衡捕获为管理目标，得到最大可持续捕获量，相应的最优捕获努力量和最优的种群水平.

系统(5.2)(5.3)反映了更新资源的开发的动态特征，但它是一种理想化的假设，即捕获行为是连续时间发生的，因为受到现实中实际操作的人力物力财力等因素的限制，这几乎是不可能的. 一个种群的实际生长过程中，外界的扰动影响常常是瞬时发生而不是持续的，这种脉冲的扰动与整个种群的持续的发展变化过程相比

可以忽略不计. 例如, 鱼群的捕获行为由于人力物力的限制只是一天的某个时段而不是不分昼夜持续的操作. 这样的行为对于鱼群随时间的连续发展方程的影响只是瞬时类似脉冲的扰动. 这就引出了所谓的脉冲捕获问题. 它与过去研究的持续捕获相比, 更具有现实意义, 因而值得研究.

对于生物资源进行脉冲开发的研究问题的实际意义的重要性是不言而喻的, 所以在实际问题中, 进行合乎现实意义的脉冲处理是必要的. 正如对资源的开发, 我们有时就需要对其捕获项进行脉冲处理.

陈兰荪在2002年简述了近年来脉冲微分方程在生命科学中的应用[140], 其中包括在药物动力学, 种群动力学, 传染病模型以及可再生资源的最优管理方面的应用. 基于这样的实际背景, 本章考虑脉冲捕获策略, 主要介绍作者在文献[125]中的工作. 据作者所知, 目前文献少有可更新资源的脉冲开采问题.

本文考虑到实际的可操作性原则, 我们将假设每隔固定的时间T对种群进行一次脉冲捕获, 并且假设对生物种群服从logistic增长模型的情况进行研究. 我们将用一种全新的方法来建立对logistic方程建立脉冲捕获方程:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1-\dfrac{N}{K}\right) - \delta(s(t))Eh(N(t)), \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \tag{5.4}$$

这里N, r, K 和 E 表示的意义与(5.1), (5.2) 和(5.3)相同; $h(N(t))$ 为通常意义下的捕获函数; δ 是Dirac 脉冲函数, 满足$\delta(0)=\infty$, $\delta(s)=0 \;\; for \;\; s\neq 0$并且$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(s)ds=1$; $s(t)$ 定义如下:

$$s(t) = \begin{cases} 0, & t = nT, \;\; n \in N; \\ -1, & t \neq nT, \;\; n \in N. \end{cases}$$

显然, 在不发生脉冲捕获的时刻, 种群的增长将遵循logistic 增长曲线; 在每个nT时刻发生脉冲捕获, 种群以$Eh(N(t))$被收获,此刻种群的数量会有突然的变化. 为了描述这个特征,我们用到了捕获函数δ. 众所周知, 满足条件

$$\theta(t) = \begin{cases} 1, & if \;\; t \geq 0; \\ 0, & if \;\; t < 0. \end{cases}$$

得Heaviside 函数$\theta(t)$的广义导数为$\theta' = \delta$. 因此, 若$t \neq nT$, $s(t) = -1$ 且$\theta(s(t)) = 0$, 也就是脉冲捕获行为不发生; 若$t = nT$, $s(t) = 0$ 且$\theta(s(t)) = 1$, 此时的捕获量$Q(nT)$满

足

$$
\begin{aligned}
Q(nT) &= \int_{-\infty}^{nT} \delta(s(t))Eh(N(t))dt - \int_{-\infty}^{(n-1)T} \delta(s(t))Eh(N(t))dt \\
&= Eh(N(nT)).
\end{aligned}
$$

对于方程(5.1)的没有捕获的情形, 可以利用变量分离法来求解, 通解记为$x(t,t_0,x_0)$, 并可以表示为:

$$
x(t,x_0) := x(t,0,x_0) = \frac{K}{1+Ce^{-rt}}, \quad 其中 \quad C = \frac{K-x_0}{x_0}, \quad x_0 = x(0). \tag{5.5}
$$

考虑到生物学意义, 我们总假设$x_0 = x(t_0) > 0$. 经过时刻T之后, 种群(5.1)的密度增长为$x(T,y) - y =: f(y)$, 即

$$
f(y) =: x(T,y) - y = \frac{\left(e^{rT}-1\right)y(K-y)}{\left(e^{rT}-1\right)y+K}. \tag{5.6}
$$

下面我们将找出使$f(y)$变化最大的$y = \bar{y}$. 方程$f'(y) = 0$ 有两个根,

$$
\bar{y} = \frac{\left(-1+\sqrt{e^{rT}}\right)K}{e^{rT}-1}, \quad \bar{Y} = \frac{\left(-1-\sqrt{e^{rT}}\right)K}{e^{rT}-1} < 0,
$$

当$0 < y < \bar{y}$时, $f'(y) > 0$; 当$\bar{y} < y$时, $f'(y) < 0$. 因此在时刻T内种群最大的变化量为

$$
\omega := \max f(y) = f(\bar{y}) = \frac{(e^{\frac{rT}{2}}-1)^2K}{e^{rT}-1}, \tag{5.7}
$$

单位时间种群最大的平均增长为

$$
max\frac{f(y)}{T} = \frac{f(\bar{y})}{T} = \frac{(e^{\frac{rT}{2}}-1)^2K}{(e^{rT}-1)T}. \tag{5.8}
$$

接下来讨论两种形式的脉冲捕获方式:常数捕获和与种群成线性关系的捕获.

首先假设按Logistic规律增长的种群在时刻nT受到常数努力量的脉冲捕获,即捕获函数$h(N) \equiv 1$, 所以每次的收获量恒为常数E. 在这样的假设下的脉冲捕

获方程为

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) - \delta(s(t))E, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \tag{5.9}$$

方程(5.9)的解记为$N(t,t_0,N_0)$, 而用$x(t,t_0,x_0)$ 表示方程(5.1)的解.

定理 5.1 如果$0 < E < \omega$, 则方程(5.9)存在两个脉冲周期解$\xi_1(t)$ 和$\xi_2(t)$

$$\xi_1(nT) = \frac{1}{2}\left(K - E - \sqrt{K^2 - 2EK + E^2 - \frac{4EK}{e^{rT}-1}}\right), \quad \forall n \in N,$$

$$\xi_2(nT) = \frac{1}{2}\left(K - E + \sqrt{K^2 - 2EK + E^2 - \frac{4EK}{e^{rT}-1}}\right), \quad \forall n \in N.$$

如果$E = \omega$, 则方程(5.9)存在唯一的一个脉冲周期解$\xi(t)$, 且$\forall n \in N$. $\xi(nT) = \frac{1}{2}(K-E)$.

证明: 令

$$F(y) := f(y) - E = \frac{\left(e^{rT}-1\right)y(K-y)}{\left(e^{rT}-1\right)y + K} - E,$$

其中$f(y)$ 如(5.6)所定义. 若$0 < E < \omega$, 则

$$K^2 - 2EK + E^2 - \frac{4EK}{e^{rT}-1} > 0.$$

易知方程$F(y) = 0$ 有两个且只有两个根

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(K - E - \sqrt{K^2 - 2EK + E^2 - \frac{4EK}{e^{rT}-1}}\right),$$

$$y_2 = \frac{1}{2}\left(K - E + \sqrt{K^2 - 2EK + E^2 - \frac{4EK}{e^{rT}-1}}\right).$$

因此, 得到

$$\begin{aligned} N(T,0,y_1) &= x(T,y_1) - E = x(T,y_1) - y_1 - E + y_1 \\ &= f(y_1) - E + y_1 = F(y_1) + y_1 \\ &= y_1 = N(0,0,y_1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
N(2T,0,y_1) &= N(2T,T,N(T,y_1)) = N(2T,T,y_1) \\
&= x(2T,T,y_1) - E \\
&= x(T,y_1) - E \\
&= y_1,
\end{aligned}
$$

以此类推可得到对$\forall n \in N$, $N(nT,0,y_1) = y_1$. 同理$\forall n \in N$, $N(nT,0,y_2) = y_2 = N(0,0,y_2)$. 记$\xi_1(t) = N(t,0,y_1)$ 及$\xi_2(t) = N(t,0,y_2)$, 那么$\xi_1(t)$ 和$\xi_2(t)$ 为(5.9)的脉冲周期解. 且有对$\forall n \in N, \xi_1(nT) = y_1$, $\xi_2(nT) = y_2$.

如果$E = \omega$, 则$F(\bar{y}) = 0$ 有且只有唯一的一个根$y_1 = y_2 = \frac{1}{2}(K-E)$, 所以(5.9) 只有一个脉冲周期解$\xi(t)$ 且$\forall n \in N, \xi(nT) = \frac{1}{2}(K-E)$.

下面讨论周期解的稳定性问题.

定理 5.2 (1). 如果$E < \omega$, 则当初值$N_0 > y_1$, 随着$t \to +\infty$ 将会有$N(t,0,N_0) \to \xi_2(t)$; 当$0 < N_0 < y_1$ 有$N(t,0,N_0) \to 0$.

(2). 如果$E = \omega$, 则当初值$N_0 > \frac{1}{2}(K-E)$ 随着$t \to +\infty$ 将会有$N(t,0,N_0) \to \xi(t)$; 而当$N_0 < \frac{1}{2}(K-E)$ 有$N(t,0,N_0) \to 0$

(3). 如果$E > \omega$, 则对$\forall N_0 \geq 0$, 都会随着$t \to +\infty$ 有$N(t,0,N_0) \to 0$.

证明: 如果$y < \bar{y}$, 则$\frac{dF(y)}{dy} = f'(y) > 0$; 如果$y > \bar{y}$, 则$\frac{dF(y)}{dy} = f'(y) < 0$. 因此推出$y_2 > \bar{y} > y_1$. 所以

$$
K > K - E > y_2 > \bar{y} > y_1 > 0,
$$

且当$0 < y < y_1$ 或$y > y_2$时, $F(y) < 0$; 当$y_1 < y < y_2$时$F(y) > 0$.

假设$E < \omega$. 并且$N_0 > y_2$, 为方便起见,记$N_n = N(nT,0,N_0)$. 那么

$$
N_1 = x(T,N_0) - E = f(N_0) + N_0 - E = F(N_0) + N_0 < N_0.
$$

另一方面, 由才$N_0 > y_2$可以推出

$$
N_1 = x(T,N_0) - E > x(T,y_2) - E = N(T,0,y_2) = \xi_2(T) = y_2.
$$

类似地有

$$
N_2 = N(2T,0,N_0) = N(2T,T,N_1) = x(T,N_1) - E = F(N_1) + N_1 < N_1
$$

and $N_2 = x(T,N_1) - E > x(T,y_2) - E = \xi_2(T) = y_2$. 这样我们得到了一个以$y_2$为下界的单调递减序列$\{N_n\}$. 显然$\{N_n\}$有极限,设为$\beta$, 则有$\beta \geq y_2$.

下面将证明$\beta = y_2$. 用反证法. 假设$\beta > y_2$, 则

$$N_{n+1} - N_n = N((n+1)T, nT, N_n) - N_n = x(T, N_n) - E - N_n = F(N_n),$$

当$n \to \infty$ 得到$0 = F(\beta)$. 而$F(y) = 0$ 只有两个根y_1 或y_2,产生矛盾. 因此$\beta = y_2$. 即$\lim\limits_{n\to\infty} N_n = y_2$. 由极限的定义,对任意的$\delta > 0$, 存在一个自然数$\bar{N}$ 满足当$n \geq \bar{N}$时,有$0 < N_n - y_2 < \delta$.

而由解对初值的连续相依性可知, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在上面提到的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 当初值满足$|N_n - y_2| < \delta$, 在将来的有限时间$[0,T)$里, 方程的解满足$|x(t,N_n) - x(t,y_2)| < \varepsilon$.

又根据自治系统解具有平移不变性,可知当$n \geq \bar{N}$和$t \in [nT,(n+1)T)$时,

$$\begin{aligned}
|N(t,0,N_0) - \xi_2(t)| &= |N(t,nT,N_n) - N(t,nT,y_2)| \\
&= |(x(t,nT,N_n) - x(t,nT,y_2)| \\
&< |x(t-nT,0,N_n) - x(t-nT,0,y_2)| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

上式表明当$t > \bar{N}T$,有$|N(t,0,N_0) - \xi_2(t)| \leq \varepsilon$, 即当$E < \omega, N_0 > y_2$时, 随着$t \to \infty$ 有$N(t,0,N_0) \to \xi_2(t)$.

如果$y_1 < N_0 < y_2$, 类似的讨论可以得到以y_2 为上界的单调递增序列$\{N_n\}$, 易证$\lim\limits_{t\to\infty} N_n = y_2$. 与前面的证明类似,当$E < \omega$, $y_1 < N_0 < y_2$ 时,随着$t \to \infty$, 有$N(t,0,N_0) \to \xi_2(t)$.

定理其余部分的证明方法类似,此处省略.

由定理4.1可知, 如果$0 < E < \omega =: \max f(y)$, 系统(5.9) 存在两个脉冲周期解$\xi_1(t)$ 和$\xi_2(t)$. 又由定理4.2 可知, $\xi_2(t)$ 是稳定的,而$\xi_1(t)$ 是不稳定的. 如果初始种群$N_0 > y_2$ 或$y_1 < N_0 < y_2$, 则$N(t,0,N_0)$ 将随着$t \to \infty$ 渐近收敛到脉冲周期解$\xi_2(t)$. 但是如果N_0 低于y_1, 那么$N(t,0,N_0)$ 将在有限的时间趋于0.

如果$E > \omega = \max f(y)$, 无论初始种群水平N_0 是多少,种群将在有限的时间内灭绝.

如果$E = \omega = \max f(y)$, 系统(5.9)存在唯一的脉冲周期解$\xi(t)$, 且$\xi(nT) = \frac{1}{2}(K - E)$ 它是半稳定的,因为当$N_0 > \xi(T)$, 随着$t \to \infty$ 有$N(t,N_0) \to \xi(t)$; 而当$N_0 < \xi(T)$, 随

着$t \to \infty$, 有$N(t,0,N_0) \to 0$. 同时我们得到时间T内的最优捕获量$Y^* = \omega$, 也就是单位时间的最优捕获努力量$\frac{\omega}{T}$.

由上面的内容可知, 当常数努力量E超过限度$\max f(x_0)$, 将会导致不能控制的开发, 即使有$0 < E < \omega = \max f(y)$, 对于密度过低的初始种群,这样常值努力量开发策略也是不可取的. 因此在下面的讨论中,我们改变捕获函数, 假设$h(N(t) = N$, 每次的捕获量与当时的种群水平成正比, 即在时刻nT, $Q(nT) = Ex(nT)$, $0 \le E < 1$, 于是脉冲捕获方程写为如下的形式:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = rN\left(1 - \dfrac{N}{K}\right) - \delta(s(t))EN, \\ N(t_0) = N_0. \end{cases} \tag{5.10}$$

定义 5.1 (5.10)的解$\xi(t)$ 对于正初始值是全局稳定的, 当且仅当对于(5.10)的任意其他解$N(t,t_0,N_0)$ 满足:

$$\lim_{t \to +\infty} |N(t,t_0,N_0) - \xi(t)| = 0.$$

定理 5.3 如果$0 < E < 1 - e^{-rT}$, 系统(5.10) 存在唯一正脉冲周期解$\xi(t)$ 满足

$$\xi(nT) = \tilde{y} = \frac{\left(e^{rT}(1-E) - 1\right) K}{e^{rT} - 1}.$$

此外, $\xi(t)$ 对任意正初始值是全局吸引的.

证明: 令

$$G(y) = x(T,y) - Ex(T,y) - y = (1-E)(f(y)+y) - y = (1-E)f(y) - Ey$$

$$= \frac{(1-E)(e^{rT}-1)(K-y)}{(e^{rT}-1)y + K} - Ey.$$

当$0 < E < 1 - e^{-rT}$时, 方程$G(y) = 0$ 有唯一的正根

$$\tilde{y} = \frac{(e^{rT}(1-E) - 1)K}{e^{rT} - 1}, \tag{5.11}$$

当$0 < y < \tilde{y}$ 时, $G(y) > 0$; 当$y > \tilde{y}$时, $G(y) < 0$.

以下将证明$N(t,0,\tilde{y})$ 是(5.10)的脉冲周期解. 因为有

$$N(T,0,\tilde{y}) = x(T,\tilde{y}) - Ex(T,\tilde{y}) = G(\tilde{y}) + \tilde{y} = \tilde{y},$$

以及

$$N(2T,0,\tilde{y}) = N(2T,T,N(T,\tilde{y})) = N(2T,T,\tilde{y})$$

$$= (1-E)x(2T,T,\tilde{y}) = (1-E)x(T,\tilde{y}) = G(\tilde{y}) + \tilde{y} = \tilde{y}.$$

以此类推,可以证明对任意的$n \in N$, 有

$$N(nT,0,\tilde{y}) = \tilde{y}.$$

所以, (5.10) 有唯一的脉冲周期解$\xi(t) := N(t,0,\tilde{y})$ $\xi(nT) = \tilde{y}$.

下面将证明$\xi(t)$ 的全局吸引性.

假设$N_0 > \tilde{y} > 0$, 并记作$N_n := N(nT,0,N_0)$, $n \in N$. 显然有

$$N_1 = N(T,0,N_0) = x(T,N_0) - Ex(T,N_0) = G(N_0) + N_0 < N_0.$$

以及$N_0 > \tilde{y}$ 时

$$N_1 = N(T,0,N_0) = (1-E)x(T,N_0) > (1-E)x(T,\tilde{y}) = N(T,0,\tilde{y}) = \tilde{y}.$$

用与定理4.2同样的证明方法可以得到$\tilde{y} < N_2 < N_1$ 因此得到了以$\tilde{y}$ 为下界的单调递减序列$\{N_n\}$, 它必然存在极限, 设为$\gamma \geq \tilde{y}$.

如果$\gamma > \tilde{y}$ 将会导致矛盾. 因为

$$N_{n+1} - N_n = x((n+1)T,nT,N_n) - Ex((n+1)T,nT,N_n) - N_n$$

$$= x(T,N_n) - Ex(T,N_n) - N_n = G(N_n),$$

于是有$G(\gamma) = 0$而$G(y) = 0$ 只有一个正根$\tilde{y}$, 产生矛盾. 这表明

$$\lim_{n\to\infty} N_n = \tilde{y}.$$

由极限的定义,对任意的$\delta > 0$, 存在一个自然数$\bar{N}$满足当$n \geq \bar{N}$时,有$0 < N_n - \tilde{y} < \delta$.

而由解对初值的连续相依性可知, 对任意的$\varepsilon > 0$, 存在上面提到的$\delta \in (0, \varepsilon)$, 当初值满足$|N_n - \tilde{y}| < \delta$, 在将来的有限时间$[0, T)$里, 方程的解满足$|x(t, N_n) - x(t, \tilde{y})| < \varepsilon$.

又根据自治系统解具有平移不变性,可知当$n \geq \bar{N}$和$t \in [nT, (n+1)T)$时,

$$\begin{aligned} |N(t, 0, N_0) - \xi(t)| &= |(1-E)(x(t, nT, N_n) - x(t, nT, \tilde{y}))| \\ &= |1-E| \cdot |x(t-nT, N_n) - x(t-nT, \tilde{y})| \\ &< (1-E)\varepsilon. \end{aligned}$$

则对任意的$N_0 > \tilde{y}$时,

$$\lim_{t \to +\infty} |N(t, 0, N_0) - \xi(t)| = 0.$$

同理可证当$0 < N_0 < \tilde{y}$时,

$$\lim_{t \to \infty} |N(t, N_0) - \xi(t)| = 0.$$

所以,$\xi(t)$ 对任意的初始值都是全局渐近稳定的. 证毕.

注意到如果$E = 1 - e^{-rT}$, 得到

$$\xi(nT) = \frac{\left(e^{rT}(1-E) - 1\right)K}{e^{rT} - 1} = 0.$$

因此我们有下面的结论:

定理 5.4 如果$E \geq 1 - e^{-rT}$, 种群X将会灭绝.

因此渔民将决定怎样进行捕获. 由定理2.3知, 脉冲时刻T是固定的,投入的捕获强度为E时,则单位时间的持续捕获量为

$$Y(E) = \frac{EK(e^{rT} - 1 - e^{rT}E)}{T(e^{rT} - 1)(1-E)}. \tag{5.12}$$

我们想要求出最优的E^* 使得$Y(E)$ 在$E = E^*$ 达到最大. 这也即是求$Y(E)$ 的最值问题.

$$Y'(E) = \frac{K(E^2 e^{rT} - 2Ee^{rT} + e^{rT} - 1)}{T(e^{rT} - 1)(1-E)^2} = 0,$$

则$E^2-2E-e^{-rT}+1=0$, 所以$E=1\pm e^{\frac{-rT}{2}}$. 由定理2.3

$$E^*=1-e^{\frac{-rT}{2}}. \tag{5.13}$$

并且

$$Y''(E)=\frac{-2e^{-rT}k}{T(-1+E)^2(1-E-e^{-rT}+e^{-rT}E)}<0,\ \ \forall\, 0<E<1-e^{-rT}.$$

则当$E=E^*$时, 达到最大值$Y(E)$. 将(5.13) 式代入(5.11)式, 得到

$$x^*(T)=\frac{K}{e^{\frac{rT}{2}}+1}. \tag{5.14}$$

将(5.13) 式代入(5.12)式, 可以得到最大的持续产量$Y(E^*)$:

$$Y(E^*)=\frac{E^*K(e^{rT}-1-e^{rT}E^*)}{T(e^{rT}-1)(1-E^*)}=\frac{K(e^{\frac{rT}{2}}-1)^2}{T(e^{rT}-1)}. \tag{5.15}$$

以上可知当投入的捕获强度为E^*时, 我们得到的最优持续捕获量为$Y(E^*)$ 以及相应的最佳种群水平$x^*(T)$.

与文献[130]Clark所得到的结果比较, 最优持续捕获量虽然相同, 但是我们的结果比文献[130]更具有可操作性.

有时渔民并不改变捕获努力量而是改变捕鱼的周期. 因此下面我们来讨论当E 固定时的最优的捕获策略.

由(5.12), 得到

$$\begin{aligned} g(T) &= \frac{EK(e^{rT}-1-e^{rT}E)}{T(e^{rT}-1)(1-E)} \\ &= \frac{KE}{1-E}\frac{1-\frac{E}{1-e^{-rT}}}{T}. \end{aligned} \tag{5.16}$$

则

$$g'(T)=-\frac{(E-e^{-rT}E+re^{-rT}TE+2e^{-rT}-1-e^{-2rT})KE}{T^2(-1+e^{-rT})(1-E-e^{-rT}+e^{-rT}E)}.$$

令$g'(T)=0$, 所以

$$H(T):=E-e^{-rT}E+re^{-rT}TE+2e^{-rT}-1-e^{-2rT}=0. \tag{5.17}$$

易知T_0满足$e^{-rT}=1-E$,

$$H(T_0)=-E(1-E)\ln(1-E)>0. \tag{5.18}$$

并且

$$\lim_{T\to\infty}H(T)=E-1<0. \tag{5.19}$$

由(5.18)和(5.19), 知存在$T^*>T_0=\dfrac{-\ln(1-E)}{r}$使得$H(T^*)=0$. 而且,

$$H'(T)=-2re^{-rT}+2re^{-2rT}+2rEe^{-rT}-r^2ETe^{-rT},$$

当$T>T_0$时,

$$H'(T)=re^{-rT}(-2+2e^{-rT}+2E-ErT)<0. \tag{5.20}$$

则存在唯一的一个实数$T^*>T_0>0$. 由(5.20), $H'(T^*)=g''(T^*)<0$, 所以当$T=T^*>-\dfrac{ln(1-E)}{r}$时, 可以得到最大的可持续产量.

下面我们将证明连续捕获要优于脉冲捕获, 然而后者比前者更加具有可操作性, 具有实际意义.

首先, 由(5.15)式知$Y(E^*)$是关于T的减函数. 且

$$Y_{E^*}(T)=\frac{K(e^{\frac{rT}{2}}-1)^2}{T(e^{rT}-1)},$$

则

$$Y'_{E^*}(T)=\frac{rTe^{\frac{rT}{2}}-e^{rT}+1}{T^2}.$$

容易证明当$T>0$时, $rTe^{\frac{rT}{2}}-e^{rT}+1<0$. 即脉冲周期越小, 捕获的越多.

下面我们来找(5.12)的最大值. (5.12) 可以写成如下形式:

$$Y(E,T)=\frac{EK(e^{rT}-1-e^{rT}E)}{T(e^{rT}-1)(1-E)}. \tag{5.21}$$

令

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Y}{\partial E}=\dfrac{K(E^2e^{rT}-2Ee^{rT}+e^{rT}-1)}{T(e^{rT}-1)(1-E)^2}=0, \\ \dfrac{\partial Y}{\partial T}=-\dfrac{(E-e^{-rT}E+re^{-rT}TE+2e^{-rT}-1-e^{-2rT})KE}{T^2(-1+e^{-rT})(1-E-e^{-rT}+e^{-rT}E)}=0, \end{cases} \tag{5.22}$$

即

$$\begin{cases} E=1-e^{\frac{-rT}{2}}, \\ E-e^{-rT}E+re^{-rT}TE+2e^{-rT}-1-e^{-2rT}=0. \end{cases} \tag{5.23}$$

由(5.23), 得到

$$(1-e^{-rT})^2-(1-e^{\frac{-rT}{2}})(1-e^{-rT}+rTe^{-rT})=0. \tag{5.24}$$

然而, 当$T>0$时,

$$(1-e^{-rT})^2-(1-e^{\frac{-rT}{2}})(1-e^{-rT}+rTe^{-rT})>0. \tag{5.25}$$

下面我们来证明(5.25)式.
如果$T>0$,

$$\begin{aligned} &(1-e^{-rT})^2-(1-e^{\frac{-rT}{2}})(1-e^{-rT}+rTe^{-rT})>0 \\ \Longleftrightarrow\ &\sqrt{c}-c\sqrt{c}+c\ln c>0, \quad \text{其中 } 0<c=e^{-rT}<1 \\ \Longleftrightarrow\ &1-c+\sqrt{c}\ln c>0. \end{aligned}$$

令

$$L(c)=1-c+\sqrt{c}\ln c,$$

则

$$
\begin{aligned}
L'(c) &= -1+\frac{1}{2}\frac{\ln c}{\sqrt{c}}+\frac{1}{\sqrt{c}} \\
&= -1+\frac{\ln c+2}{2\sqrt{c}}.
\end{aligned}
$$

令

$$J(c)=2\sqrt{c}-\ln c-2,$$

则, 当$0<c<1$ 时

$$J'(c)=\frac{1}{\sqrt{c}}-\frac{1}{c}<0.$$

所以

$$J(c)>J(1)=0,$$

即

$$L'(c)=-1+\frac{\ln c+2}{2\sqrt{c}}<0.$$

所以

$$L(c)>L(1)=0.$$

证毕.

所以方程(5.24) 不存在任何正根, 也就是说, 当$T>0$时函数$Y(E,T)$ 不存在最大值和最小值. 事实上, 由(5.15)式, 知当T 趋进于0 时, $Y(E^{*})$ 将达到最大值, $\frac{rK}{4}$. 另一方面, 与Clark的结论进行比较, 当(E,T) 越趋进于$(0,0)$ 时, 收获越多. 因此如果不考虑实际的可操作性原则, 连续捕获是最优的.

最后我们可以得到出结论:

当脉冲捕获函数是常数时, 在一定的条件下, 可能有两个脉冲周期解; 可能有一个脉冲周期解. 当有一个脉冲周期解时, 是半稳定的. 就是说当常数努力量超过限度, 将会导致不能控制的开发, 即使有$0<E<\omega=\max f(y)$, 对于密度过低的初始种群, 这样常值努力量开发策略也是不可取的. 因此这种情况下不存在最优的持久收益.

当脉冲捕获函数是为比例型捕获时, 在一定的条件下存在一个全局吸引的脉冲周期解, 当T固定时, 以及当E固定时的最优的捕获策略; 如果T和E同时变化时, 当(E,T) 趋进于$(0,0)$时, 得到最优的捕获策略. 即脉冲时刻的间隔趋于0(此时变为连续的捕获) 我们得到的捕获策略与Clark的结果是一致的.

结 论

本论文第二章利用锥不动点定理证明了Lotka-Volterra 型一阶脉冲微分方程和具有有限时滞的一阶脉冲微分方程的周期边值问题存在多个周期正解的充分条件, 举出具体的满足一定条件的生态数学模型的例子, 我们得到的结果是最优的.

第三章证明了二阶脉冲微分方程周期边值问题周期正解的存在性, 并且利用Leray-Schauder抉择定理和锥不动点定理得到了有奇异的二阶脉冲微分方程周期边值问题存在多个周期正解的充分条件.

第四章利用重合度理论证明了多种群互惠系统和两种群捕食系统至少存在一个周期正解.

第五章给出经典的Logistic模型的脉冲捕获策略问题.

本文的主要特点在于: 利用锥不动点理论和Leray-Schauder抉择定理系统的研究了一阶、二阶脉冲微分方程周期边值问题周期解的存在性问题并给出了具体的实例, 至今, 国内外学者对一阶、二阶脉冲微分方程周期解问题的讨论绝大多数均是利用上下解理论; 利用重合度理论讨论了具体的多种群生态数学模型的周期解的存在性; 用一种全新的方法对经典Logistic模型建立了脉冲捕获方程给出了脉冲捕获策略.

显然可以看出, 本文所考虑的系统均是固定时刻的脉冲微分系统. 而且对于二阶脉冲微分系统的讨论中, 由于我们主要是利用锥不动点理论, 其等价的积分微分方程的格林函数的导数的符号不能保证它是正的, 因此我们只给出了函数导数有脉冲而函数是连续的情况的周期解的存在性的充分条件. 而对于函数及函数的导数都有脉冲情况的周期解的存在性还可以进一步研究. 众所周知, 随机脉冲微分系统研究将更具有实际意义, 因此对于随机脉冲微分系统的周期问题及单种群随机脉冲开发的优化问题也是一个可以进一步研究的问题.

参考文献

[1] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Impulsive Differential Equations: Periodic Solutions and Applications, Longman, Harlow, 1993.

[2] D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Systems with Impulse Effect, Ellis Horwood, Chichester, 1989.

[3] V. Lakshmikantham, D. D. Bainov and P. S. Simeonov, Theory of Impulsive Differential Equations, World Scientific, Singapore, 1989.

[4] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Differential Equations with Impulse Effect, Viska Skoda, Kiev, 1987. [in Russian].

[5] A. V. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, J. Math. Anal. Appl., 1995, 193: 923-941.

[6] D. D. Bainov, V. Covachev, I. Stamova, Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equation of neutral type, J. Math. Anal. Appl., 1994, 187: 790-808.

[7] J. H. Shen, The existence of nonoscillatory solutions of delay differential equations with impulses, Appl. Math. Comput., 1996, 77: 153-165.

[8] J. Shen, On some asymptotic stability results of impulsive integro-differential equations, Chinese Math. Ann., 1996, 17 A: 759-765.

[9] J. Shen, J. Yan, Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations, Nonlinear Anal., 1998, 33: 519-531.

[10] J. S. Yu, B. G. Zhang, Stability theorems for delay differential equations with impulses, J. Math. Anal. Appl., 1996, 199: 162-175.

[11] Juan J. Nieto, Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order, J. Math. Anal. Appl., 1997, 205: 423-433.

[12] W. Zhang and M. Fan, Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays, Math. and Comput. Modelling, 2004, 39: 479-493.

[13] J. Zhen, Z. Ma, M. Han, The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competition systems with impulsive, Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 22: 181-188.

[14] D. Jiang, J. Wei, Existence of positive periodic solutions for Volterra intergo-differential equations, Acta Mathematica scientia. 2001, 21B: 553-560.

[15] Deimling K. Nonlinear Functional Analysis. Springer-Verlag, New York. 1985.

[16] J. Luo, J. Yu. Global asymptoticstability of nonautonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments. Acta Mathematica Sinica, 1998, 41: 1273-1282.

[17] Krasnoselskii M A. Positive Solution of Operator Equation. Gorningen: Noordhoff. 1964.

[18] Weng P, Liang M. The existence and behavior of periodic solution of Hematcpoiesis model. Mathematica Applicate. 1995, 8: 434-439.

[19] Weng P. Existence and global attractivity of periodic solution of interodifferential equation in population dynamics. Acta. Appl. Math., 1996, 12: 427-434.

[20] Gurney W S C, Blythe S P, Nisbet R M. Nicholson's blowflies revisited. Nature. 1980, 287: 17-20.

[21] Gopalsamy K, Weng P. Global attractivity and level crossing in model of Hematopoiesis. Bulletin of the Institute of Mathematics, Academia Sinica, 1994, 22: 341-360.

[22] Joseph W-H So, Yu Jianshe. Global attractivity and uniformly persistence in Nicholson's blowflies. Differential Equation and Dynamics Systems, 1994, 2: 11-18.

[23] Mackey M C, Galass. Oscillations and chaos in phycological control systems. Sciences, 1987, 197: 287-289.

[24] Yoshizawa T. Stability Theory By Liapunov Second Method. The Mathematical Society of Japam. 1966.

[25] Lan K, Webb J. L. R. Positive solutions of semilinear differential equations with singularities. J.Differential Equations, 1998, 148: 407-421.

[26] Wan A. Y. Jiang D. Q. Existence of positive periodic solutions for functional differential equations, Kyushu Journal of Mathematics, 2002, 56: 193-202.

[27] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Differential Equations with Impulse Effect (in Russian), Visca Skola Kiev, 1987.

[28] V. D. Mil'man, A. D. Myshlis, On the stability of motion in Nonlinear Mechanics, Sib. Math. J., 1960, 233-237.

[29] D. D. Bainov, I. M. Stamova, Uniform asymptotic stability of impulsive differential-difference equations of neutral type by Lyapunov's direct method, J. Comput. Appl. Math, J. Comput. Appl. Math., 1994, 187: 790-808.

[30] K. Gapalsamy, Stability and oscillations in delay differential equations of population dynamics, Kluwer academic publisher, Boston, 1992.

[31] J. R. Graf, C. Qian, Global attractivity in differential equations with variable delays, J.Austral. Math. Soc. Ser., 2000, B41: 568-579.

[32] I. Gyori, G. Ladas, Oscillation theory of delay differential equations with applications, Claredon Press Oxford, 1991.

[33] J. S. Yu, Global attrctivity of zero solution of a class of function differential equation and its application, Sci. China Ser 1996, A39(3):32-38.

[34] J. Yu, B. Zhang, Stability theorem for delay differential equations with impulse, J. Math. Anal. Appl, 1996, 199: 162-175.

[35] B. Zhang, Y. Liu, Global attractivity for certain impulsive delay differential equations, Nonlinear Anal., 2003, 52: 725-736.

[36] X. Zhang, J. Yan, Global attractivity in impulsive functional differential equations. Indian J. Pure Appl. Math., 1998, 29(5):871-878.

[37] I. Rachunkova and M. Tvrdy, Existence results for impulsive second-order periodic problems, Nonlinear Anal., 2004, 59: 133-146.

[38] J. W. Luo and J. S. Yu, Global asymptotic stability of nonautonomous mathematical ecological equations with distributed deviating arguments, Acta Mathematica Sinica, 1998, 41: 1273-1282.

[39] M. Benchohra, A. Ouahab, Multiple solutions for nonresonance impulsive functional differential equations, 1964.

[40] 郭大钧, 孙经先, 刘兆理, 非线性常微分泛函方法. 济南: 山东科技出版社, 1995.

[41] 郭大钧, 非线性分析中的半序方法.济南: 山东科技出版社, 1997.

[42] W. S. C. Gurney, S. P. Blythe and R M. Nisbet, Nicholson's blowflies revisited. Nature, 1980, 287: 17-20.

[43] J. K. Hale, Theory of functional differential equations, New York: Springer-Verlag, 1977.

[44] X. Fu, B. Yan, The global solutions of impulsive functional differential equations in Banach spaces, Nonlinear Studies, 2000,1(1): 1-17.

[45] M. C. Mackey and Galass, Oscillations and chaos in phycological control systems, Sciences, 1987, 197: 287-289.

[46] J. J. Nieto, periodic boundary value problems for first order impulsive ordinary differential equations, Nonlinear Anal., 2002, 51: 1223-1232.

[47] K. Lan and J. L.Webb, Positive solutions of semilinear differential equations with singularities, J. Differential Equations, 1998, 148: 407-421.

[48] A. Zhao, J. Yan, Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations, J. Math. Anal. Appl., 1996, 201: 943-954.

[49] D. Franco, J. J. Nieto, Maximum principles for periodic impulsive first order problem, J. Comput. Appl. Math., 1998, 88: 144-159.

[50] I. Rachunková , Jan Tomecek. Impulsive BVPs with nonlinear boundary conditions for the second order differential equations without growth restrictions，J. Math. Anal. Appl., 2004, 292: 525-539.

[51] D. Y. jun. Periodic Boundary Value Problems for Functional Differential Equations with Impulses, J. Math. Anal. Appl. 1997, 210: 170-181.

[52] X. Liu, D.Guo. Periodic Boundary Value Problems for a Class of Second-Order Impulsive Integro-Differential Equations in Banach Spaces, Appl. Math. Comput., 1997, 216: 284-302.

[53] W. Ding , M. Han, Periodic boundary value problem for the second order impulsive functional differential equations, Appl. Math. Comput., 2004, 155 A: 709-726.

[54] Irena Rachunková, Milan Tvrdý , Impulsive periodic Boundary Value Problems and Topological Degree, Founc. Diff. equ., 2002, 9: 471-489.

[55] S. G. Hristova , D. D. Bainov, Monotone-Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a Boundary Value Problem for Systems of Impulsive Differential-Difference Equations, J. Math. Anal. Appl., 1996, 197: 1-13.

[56] L. H. Erbe and D.Guo, Periodic boundary value problems for second order integrodifferential equations of mixed type, Appl. Anal., 1992, 46: 249-258.

[57] Z. Wei, Periodic boundary value problems for second order impulsive integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 1995, 195: 214-229.

[58] 闫宝强, 傅希林,具有无限时滞脉冲泛函微分方程解的存在性, 中国学术期刊文摘, 1999.

[59] Z. He, J. Yu, Periodic boundary value problem for first order impulsive ordinary differential equations, J. Math. Anal. Appl., 2002, 272:67-78.

[60] R. P. Agarwal , D. O'Regan, Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, Appl. Math. Comput., 2000, 114: 51-59.

[61] L. Yong, C. F. Zhong, L. Z. Hua, Periodic boundary value problems for impulsive differential equations. Nonlinear Anal., 1997, 29: 1253-1264.

[62] D. Jiang, On the existence of positive solutions to a second order periodic BVP, Acta Mathematica scientia. 1998, B 18: 31-35.

[63] E. K. Lee , Y.H. Lee, Multiple positive solutions of singular two point boundary value problems for second order impulsive differential equations, Appl. Math. Comput., 2004, 158:

745-759.

[64] P. W. Eloe, J. Handerson, positive solutions of boundary value problems for ordinary differential equations with impulse, Dyn. Continuous, Discr.Impuls. Syst., 1998, 4: 285-294.

[65] 刘衍胜, Banach 空间一类奇异脉冲微分方程边值问题多个正解的存在性, 系统科学与数学, 2003, 23(3): 215-222.

[66] J. J. Nieto, Impulsive resonance periodic problems of first order, Appl. Math. Lett., 2002, 15: 489-493.

[67] Pedro J. Torres, Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem. Journal of Differential Equations, 2003, 190: 643-662.

[68] F. Merdivenci Atici and G.Sh. Guseinov, On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions. Journal of computational and Applied Mathematics, 2001, 132: 341-356.

[69] A. C. Lazer, S. Solimini, On periodic solutions of nonlinear differential equations with singularities, Proc. Amer. Math. Soc., 1987, 99: 109-114.

[70] M. del Pino, R. Manásevich and A. Montero, T-periodic solutions for some second-order differential equations with singularities, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect., 1992, A(120): 231-243.

[71] A. Fonda, R. Manásevich and F. Zanolin, Subharmonic solutions for some second order differential equations with singularities, SIAM J. Math. Anal., 1993, 24: 1294-1311.

[72] P. Habets, L. Sanchez, Periodic solution of some Liénard equations with singularities, Proc. Amer. Math. Soc., 1990, 109: 1135-1144.

[73] M. R. Zhang, Periodic solutions of Liénard equations with singular forces of repulsive type, J. Math. Anal. Appl., 1996, 203: 254-269.

[74] I. Rachunková, M. Tvrdý, I. Vrkoč, Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems, J. Differential Equations, 2001, 176: 445-469.

[75] D. Q. Jiang, J. Chu and M. Zhang, Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations, J. Differential Equations, 2005, 211: 282-302.

[76] C. De Coster and P. Habets, Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems: Classical and recent results, *in* "Nonlinear Analysis and Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations" (ed. F. Zanolin), pp. 1-78, CISM-ICMS 371, Springer-Verlag, New York, 1996.

[77] M. A. del Pino, R. F. Manásevich, and A. Montero, T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1992 120A: 231-243.

[78] Y. Dong, Invariance of homotopy and an extension of a theorem by Habets-Metzen on periodic solutions of Duffing equations, Nonlinear Anal., 2001, 46: 1123-1132.

[79] L. H. Erbe and R. M. Mathsen, Positive solutions for singular nonlinear boundary value problems, Nonlinear Anal., 2001, 46: 979-986.

[80] A. Fonda, Periodic solutions of scalar second order differential equations with a singularity, Mém. Classe Sci. Acad. Roy. Belgique, 1993, 8-IV : 68-98.

[81] 傅希林, 闫宝强, 刘衍胜, 脉冲微分系统引论, 科学出版社, 2005.

[82] J. Mawhin, Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equations, *in* "Topological Methods for Ordinary Differential Equations" (eds. M. Furi and P. Zecca), Lecture Notes Math., Vol. **1537**, pp. 74-142, Springer, New York/Berlin, 1993.

[83] D. O'Regan, Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations, Kluwer Academic, Dordrecht, 1997.

[84] X. Tang, Z. He, J. Yu, Stability theorems for delay differential equations with impulses, Appl. Math. Comput., 2002, 131: 373-381.

[85] Y. Liu, W. Ge, Stibility theorems and existence results for periodic solutions of nonlinear impulsive delay differential equations with variable coefficients, Nonlinear Anal., 2004,57:363-399.

[86] P. J. Torres and M. Zhang, A monotone iterative scheme for a nonlinear second order equation based on a generalized anti-maximum principle, Math. Nachr, 2003, 251: 101-107.

[87] Irena Rachunková , Jan Tomecek. Impulsive BVPs with nonlinear boundary conditions for the second order differential equations without growth restrictions，J. Math. Anal. Appl, 2004, 292: 525-539.

[88] D. Y. jun. Periodic Boundary Value Problems for Functional Differential Equations with Impulses, J. Math. Anal. Appl., 1997, 210: 170-181.

[89] Cushing J M, Intergrodifferential equations and delay models in population dynamics, Lect. Notes Biomath, Berlin Heidlberg New York, Springer, Vol 20, 1977.

[90] W. Ding , M. Han, Periodic boundary value problem for the second order impulsive functional differential equations, Appl. Math. Comput., 2004, 155 A: 709-726.

[91] Cushing J M, Forced asymptotically periodic solutions of predator-prey systems with or without hereditary effects, SIAM J. Appl. Math., 1976, 30(4):665-673.

[92] S. G. Hristova , D. D. Bainov, Monotone-Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a Boundary Value Problem for Systems of Impulsive Differential-Difference Equations, J. Math. Anal. Appl., 1996, 197: 1-13.

[93] L. H. Erbe and D.Guo, Periodic boundary value problems for second order integrodifferential equations of mixed type, Appl. Anal., 1992, 46: 249-258.

[94] Z. L. Wei , Periodic boundary value problems for second order impulsive integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces, J. Math. Anal. Appl., 1995, 195: 214-229.

[95] A. M. Samoilenko and N. A. Perestyuk, Differential Equations with Impulse Effect (in Russian). Visca Skola, Kiev, 1987.

[96] Cushing J M, Two species competition in a periodic environment, J. Math. Biol., 1980, 10: 385-400.

[97] L. Yong, C. F. Zhong, L. Z. Hua, Periodic boundary value problems for impulsive differential equations. Nonlinear Anal., 1997, 29: 1253-1264.

[98] R. P. Agarwal , D. O'Regan, Multiple nonnegative solutions for second order impulsive differential equations, Appl. Math. Comput., 2000, 114: 51-59.

[99] E. K. Lee , Y. H. Lee, Multiple positive solutions of singular two point boundary value problems for second order impulsive differential equations, Appl. Math. Comput., 2004, 158: 745-759.

[100] P. W. Eloe, J.Handerson, positive solutions of boundary value problems for ordinary differential equations with impulse, Dyn. Continuous, Discr.Impuls. Syst., 1998, 4: 285-294.

[101] Cushing J M, Periodic Lotka-Volterra competition equations, J. Math. Bilo., 1986, 24: 381-403.

[102] M. Zhang, A relationship between the periodic and the Dirichlet BVPs of singular differential equations, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1998, 128A: 1099-1114.

[103] V. Bevc, J. L. Palmer, and C. Süsskind, On the design of the transition region of axisymmetric magnetically focusing beam valves, J. British Inst. Radio Engineers, 1958, 18: 696-708.

[104] T. Ding, A boundary value problem for the periodic Brillouin focusing system, Acta Sci. Natur. Univ. Pekinensis, 1965, 11: 31–38.

[105] Y. Liu, Structure of a class singular boundary value problem with superlinear effect, J. Math. Anal. Appl., 2003, 284: 64-75.

[106] M. A. del Pino, R. F. Manásevich, and A. Montero, T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities Proc. Royal Soc. Edinburgh, 1992, 120A:

231-243.

[107] J. Lei, X. Li, P. Yan, and M. Zhang, Twist character of the least amplitude periodic solution of the forced pendulem, SIAM J. Math. Anal., 2003, 35: 844-867.

[108] Y. Liu, A. Qi, Positive solutions of nonlinear singular boundary value problem in abstract space, Comput. and Math. Appl., 2004, 47: 683-688.

[109] Y. Liu, B. Yan, Multiple solutions of singular boundary value problem for differential systems, J. Math. Anal. Appl., 2003, 287(2): 543-559.

[110] A. V. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, Exponential stability of linear delay impulsive differential equations, J. Math. Anal. Appl., 1995, 193: 923-941.

[111] K. Wang, K Huang, C_h-spaces and the boundedness of solutions for functional differential equations and periodic solutions, Acta Science of China, 1987, 3A:242-253.

[112] L. Wen, P Weng. Weakly exponentially asymptotic stability of functional differential equation with impulse, Dynamics of Countinous. Discrete and Impulsive Systems, 1999,5:251-271.

[113] J. Shen, J. Yan, Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations, Nonlinear Anal., 1998, 33: 519-531.

[114] J. S. Yu, B. G. Zhang, Stability theorems for delay differential equations with impulses, J. Math. Anal. Appl., 1996, 199: 162-175.

[115] B. Yan. Multiple unbounded solutions boundary value problems for second order differential equations on the half line. Nonlinear Analysis, 2002, 51:1031-1044.

[116] B. Yan, Y. Liu, Unbounded solution of the singular boundary value problem for second order differential equations on the half-line. Appl. Math. and comput., 2004, 147: 629-644.

[117] B. Yan, X. Liu, Multiple solutions of impulsive boundary value problems on the half-line Banach spaces, SUT Journal of Mathematics, 2000, 36(2): 167-183.

[118] May R.M. Theoretical Ecology, Principle and Applications. Sounders, Philadelphia, 1976.

[119] R. E. Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[120] P. Yang, R. Xu, Global Asymptotic Stability of Periodic Solution in N-Species Cooperative System with Time Delays, Journal of Biomathematics, 1998, 13: 23-28.

[121] 张晓颖, 柏灵, 范猛, 王克, 具有holling III类功能反应的捕食者食系统差分方程周期解的存在性[J], 应用数学2002, 15(3): 25-31.

[122] 郭大钧, 孙经先, 抽象空间常微分方程, 济南, 山东科学技术出版社, 1989.

[123] D. Guo, VLakshmikantham, Nonlinear Problems in Abstract Cones, New York, Acdemic Press., Inc. 1988.

[124] A. V. Anokhin, L. Berezansky, E. Braverman, Exponential stability of linear delay impulsive differential equations[J], J. Math. Anal. Appl., 1995,193: 923-941.

[125] X. Zhang, Z. Shuai, K. Wang, Optimal impulsive harvesting policy for single population, Nonlinear Analysis :Real World Application, 2003, 4, 639-651.

[126] 高海音, 张晓颖, 翁世有, 王克, 非自治种群互惠系统的周期解, [J]东北师范大学学报(自然科学版), 2004, 4, 11-16.

[127] 柏灵, 王克, 一类具有比率型功能反应的食物链系统周期解的存在性, [J] 东北师大学报(自然科学版) 2003, 35(1): 1-9.

[128] 张晓颖, 王克, 具时滞的N种群互惠系统的概周期解[J], 东北师大学报(自然科学版) 2002, 34(3):9-13.

[129] R. E. Gaines, J. L. Mawhin, Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations[M], Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[130] C. W. Clark, Mathematical Bio-economics: The optimal management of renewable resources , 2nd ed, Wiley, New York, 1990.

[131] G. V. Tsretkva, Construction of an optimal policy taking into account ecological constraints (Russian), Modelling of natural system and optimal control problems(Russian). (China), Vo"Naukce", Novosibirsk, 1995, pp.65-74.

[132] Yoshizawa T., Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions, Springer-Verlag, New York Inc. 1975, 210-223.

[133] A. W. Leung, Optimal harvesting-coefficient control of steady-state prey-predator diffusive Volterra-Lotka systems, Appl. Math. Optim., 1995, 31(2): 219.

[134] M. Fan and K. Wang, Optimal harvesting policy for single population with periodic coefficients, Mathematical Bioscience, 1998, 152: 165-177.

[135] Luis H.R. Alvarez and Larry A. Shepp, Optimal harvesting of stochastically fluctuating populations, Journal of Mathematical Biology, 1998, 37: 155-177.

[136] Ballinger G, X. Liu, Permanence of population growth models with impulsive effects, Math. Comput. Model., 1997, 26: 59-72.

[137] D. Franco and Juan J. Nieto, First-order impulsive ordinary differential equations with anti-periodic and nonlinear boundary conditions, Nonlinear Anal. 2000, 42: 163-173.

[138] Z. Luo and J. Shen, Stability and boundedness for impulsive functional differential equations with infinite delays, Nonlinear Anal., 2001, 46: 475-493.

[139] J. Angelova and A. Dishliev, Optimization problems for one-impulsive models from population dynamics, Nonlinear Anal., 2000, 39: 483-497.

[140] 陈兰荪, 脉冲微分方程与生命科学, 平顶山师专学报, 2002, 17(2): 1-8.

[141] X. N. Liu, L. S. Chen, Complex dynamics of Holling type II Lotka – Volterra predator – prey system with impulsive perturbations on the predator, Chaos Solitons & Fractals, 2003, 16: 311 – 320.

[142] S. W. Zhang, F. Y. Wang, L. S. Chen, A food chain model with impulsive perturbations and Holling IV functional response, Chaos Solitons & Fractals, 2005, 26: 855 – 866.

[143] S. W. Zhang, L. S. Chen, A Holling II functional response food chain model with impulsive perturbations, Chaos Solitons & Fractals, 2005, 24: 1269 – 1278.

[144] S. W. Zhang, L. S. Chen, Chaos in three species food chain system with impulsive perturbations, 2005, 24: 73 – 83.

[145] G. Z. Zeng, L. S. Chen, L. H. Sun, Complexity of an SIR epidemic dynamics model with impulsive vaccination control, Chaos Solitons & Fractals, 2005, 26: 495 – 505.

[146] 刘兵, 陈兰荪, 张玉娟, 基于IPM 策略的捕食与被捕食系统的动力学性质, 工程数学学报, 2005, 22(1): 9-14.

[147] 张艳燕, 傅希林, 脉冲混合系统的稳定性分析, 山东师范大学学报(自然科学版), 2003，6(18)：1-3

[148] 韩晓明, 傅希林, 多个李雅普诺夫函数方法与实际渐近稳定，科学技术与工程, 2003, 10(5): 393-394.

[149] 郗强, 傅希林, 锥值Lyapunov函数和脉冲混合系统的稳定性，科学技术与工程，2005, 6(13): 850-855.

[150] 傅希林, 綦建刚, 刘衍胜, 脉冲自治系统周期解存在及吸引的充要条件, 数学年刊A辑(中文版)2002, 23(A)4: 505-512.

[151] 张艳燕, 傅希林, 脉冲混合系统的严格一致稳定性质, 科学技术与工程, 2003, 5(3): 395-396.

[152] 孙晓辉, 傅希林, 非线性微分系统的(h_0, h, M_0)一致有界性质，科学技术与工程, 2003, 3(3): 211-212.

[153] 盖明久, 时宝, 张德存, 一阶泛函微分方程解的存在唯一性, 工程数学学报, 2003, 20(4): 105-108.

[154] 盖明久, 时宝, 张德存, 二阶混合型泛函微分方程边值问题解的存在性, 应用数学学报, 2002, 25(4): 666-671.

[155] 蒲明久, 时宝, 张德存, 二阶奇异泛函微分方程的两点边值问题, 数学年刊A辑(中文版), 2001, 22A,6: 751-760.

[156] 陈安平, 曹进德, 黄立宏, 时滞BAM神经网络周期解的存在性和全局指数稳定性, 应用数学学报, 2005, 28(2): 193-209.

后 记

本论文是在导师王克教授耐心指导，不断启发和严格要求下完成的. 在我攻读学位期间，王克教授的悉心专研、实事求是、不骄不躁的科研精神及一丝不苟的治学态度，孜孜不倦的工作热情都给予我深刻的印象和极大的影响，使我受益匪浅，终生难忘. 在此特向王克老师表示衷心的感谢! “做一个好人，当一名好老师，搞好科研”，这是王克老师一直对我们的告诫. 同时，这也是我，以及王老师其他学生，终身的奋斗目标.

同时，还要衷心感谢蒋达清教授，在我完成论文的过程中给与我的悉心指导和热情的帮助，在此表示由衷的感谢.

感谢潘家齐教授，范猛教授，张入元教授等多位任课教师的指导和帮助. 在此论文完成之际，特向以上专家致以最诚挚的谢意!

感谢东北师范大学数学与统计学院给我创造的良好的学习和科研环境!

感谢我的同学和同事给予的帮助!

最后感谢我的父母和我的丈夫，是他们的爱给我继续学习和从事科研的决心. 没有他们，就不会有我的现在.

由于能力和水平有限，对于文中的缺点和错误恳请各位专家不吝赐教!

个人简历、在学期间的研究成果及发表的论文

个人简历

1973年5月12日出生于吉林省榆树市，1991年9月考入东北师范大学数学系数学教育专业，1995年7月本科毕业并获得理学学士学位，同年在长春大学理学院工作。1999年9月考入东北师范大学数学系应用数学专业攻读硕士，2001年12月硕士研究生毕业并获得理学硕士学位，次年9月考入东北师范大学数学系应用数学专业攻读应用微分动力系统方向博士至今。

在国际和国内学术刊物上发表的论文

[1] 张晓颖, 柏灵, 范猛, 王克, Existence of Positive Periodic Solution for Predator-Prey Difference System with Holling III Functional Response, 应用数学2002, 3, 25-32;

[2] 张晓颖, 王克, 具时滞的N种群互惠系统的概周期解, 东北师范大学学报, 2002, 3, 9-14;

[3] 张晓颖, 帅智胜, 王克, Optimal Impulsive harvesting policy for single population, Nonlinear Analysis :Real World Application, 2003, 4, 639-651;(SCI)

[4] 高海音,张晓颖, 翁世有, 王克,一类非自治的N种群互惠系统的周期正解, 东北师范大学学报, 2004, 4, 11-16;

[5] 张晓颖, 王克, 三维捕食系统的概周期解的研究, 长春大学学报, 2005, 2, 32-38;

[6] 李晓月, 林晓宁, 蒋达清, 张晓颖, A New Existence Theory for Single and Multiple Positive Periodic Solutions to Functional Differential Equations with Impulse Effects, Nonlinear Analysis Theory, Methods & Applications", 2005, (62), 683-701;(SCI)

校样论文

1] 张晓颖, 蒋达清, 李晓月, 王克, A new existence theory for single and multiple positive periodic solutions to Volterra integro-differential equations with impulse effects, Computers and Mathematics with Applications.

2] 高海音, 张晓颖, 翁世有, 王克, 具有Holling III 类功能反应捕食者食脉冲系统正周期解的存在性, 吉林大学学报(理学版).

投稿论文

1] 张晓颖, 蒋达清, 翁世有, 高海音, 王克, Multiple positive solutions of periodic boundary value problems for second order impulsive differential equations.

脉冲微分系统的周期问题

作者： 张晓颖
学位授予单位： 东北师范大学

参考文献(156条)

1. D D Bainov. P S Simeonov Impulsive Differential Equations:Periodic Solutions and Applications 1993

2. D D Bainov. P S Simeonov Systems with Impulse Effect 1989

3. V Lakshmikantham. D D Bainov. P S Simeonov Theory of Impulsive Differential Equations 1989

4. A M Samoilenko. N A Perestyuk Differential Equations with Impulse Effect (in Russian) 1987

5. A V Anokhin. L Berezansky. E Braverman Exponential stability of linear delay impulsive differential equations[外文期刊] 1995

6. D D Bainov. V Covachev. I Stamova Stability under persistent disturbances of impulsive differential-difference equation of neutral type 1994

7. J H Shen The existence of nonoscillatory solutions of delay differential equations with impulses 1996

8. J Shen On some asymptotic stability results of impulsive integro-differential equations 1996

9. J Shen. J Yan Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations 1998

10. J S Yu. B G Zhang Stability theorems for delay differential equations with impulses 1996

11. Juan J Nieto Basic theory for nonresonance impulsive periodic problems of first order[外文期刊] 1997

12. W Zhang. M Fan Periodicity in a generalized ecological competition system governed by impulsive differential equations with delays 2004

13. J Zhen. Z Ma. M Han The existence of periodic solutions of the n-species Lotka-Volterra competition systems with impulsive 2004

14. 蒋达清. 魏俊杰 EXISTENCE OF POSITIVE PERIODIC SOLUTIONS FOR VOLTERRA INTERGO-DIFFERENTIAL EQUATIONS [期刊论文]-数学物理学报(英文版) 2001(4)

15. Deimling K Nonlinear Functional Analysis 1985

16. J Luo. J Yu Global asymptoticstability of nonautonomous mathematical ecological equa tions with distributed deviating arguments 1998

17. Krasnoselskii M A Positive Solution of Operator Equation 1964

18. Liang M The existence and behavior of periodic solution of Hematcpoiesis model 1995

19. Weng P Existence and global attractivity of periodic solution of interodifferential equation in population dynamics 1996

20. Gurney W S C. Blythe S P. Nisbet R M Nicholson's blowflies revisited 1980

21. Gopalsamy K. Weng P Global attractivity and level crossing in model of Hematopoiesis 1994

22. Joseph W H So. Yu Jianshe Global attractivity and uniformly persistence in Nicholson's blowflies 1994

23. Mackey M C Galass Oscillations and chaos in phycological control systems 1987

24. Yoshizawa T Stability Theory By Liapunov Second Method 1966

25. Lan K. Webb J L R Positive solutions of semilinear differential equations with singulari ties 1998

26. Wan A Y. Jiang D Q Existence of positive periodic solutions for functional differential equations 2002

27. A M Samoilenko. N A Perestyuk Differential Equations with Impulse Effect (in Russian) 1987

28. V D Mil'man. A D Myshlis On the stability of motion in Nonlinear Mechanics 1960

29. D D Bainov. I M Stamova Uniform asymptotic stability of impulsive differential- difference equations of neutral type by Lyapunov's direct method 1994

30. K Gapalsamy Stability and oscillations in delay differential equations of population dynam ics 1992

31. J R Graf. C Qian Global attractivity in differential equations with variable delays 2000

32. I Gyori. G Ladas Oscillation theory of delay differential equations with applications 1991

33. J S Yu Global attrctivity of zero solution of a class of function differential equation and its application 1996(03)

34. J Yu. B Zhang Stability theorem for delay differential equations with impulse 1996

35. B Zhang. Y Liu Global attractivity for certain impulsive delay differential equations 2003

36. X Zhang. J Yan Global attractivity in impulsive functional differential equations 1998(05)

37. I Rachunkova. M Tvrdy Existence results for impulsive second-order periodic prob lems 2004

38. J W Luo. J S Yu Global asymptotic stability of nonautonomous mathematical eco logical equations with distributed deviating arguments 1998

39. M Benchohra. A Ouahab Multiple solutions for nonresonance impulsive functional differ ential equations 1964

40. 郭大钧. 孙经先. 刘兆理 非线性常微分泛函方法 1995

41. 郭大钧 非线性分析中的半序方法 1997

42. W S C Gurney. S P Blythe. R M Nisbet Nicholson's blowflies revisited 1980

43. J K Hale Theory of functional differential equations 1977

44. X Fu. B Yan The global solutions of impulsive functional differential equations in Banach spaces 2000(01)

45. M C Mackey. Galass Oscillations and chaos in phycological control systems 1987

46. J J Nieto periodic boundary value problems for first order impulsive ordinary differential equations 2002

47. K Lan. J L Webb Positive solutions of semilinear differential equations with singulari ties 1998

48. A Zhao. J Yan Asymptotic behavior of solutions of impulsive delay differential equations[外文期刊] 1996

49. D Franco. J J Nieto Maximum principles for periodic impulsive first order problem 1998

50. I Rachunková. Jan Tomecek Impulsive BVPs with nonlinear boundary conditions for the second order differential equations without growth restrictions[外文期刊] 2004

51. D Y jun Periodic Boundary Value Problems for Functional Differential Equations with Impulses 1997

52. X Liu. D Guo Periodic Boundary Value Problems for a Class of Second-Order Impulsive Integro-Differential Equations in Banach Spaces 1997

53. W Ding. M Han Periodic boundary value problem for the second order impulsive func tional differential equations 2004

54. Irena Rachunková. Milan Tvrd(y) Impulsive periodic Boundary Value Problems and Topo logical Degree 2002

55. S G Hristova. D D Bainov Monotone-Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a Boundary Value

Problem for Systems of Impulsive Differential-Difference Equations 1996

56. L H Erbe. D Guo Periodic boundary value problems for second order integrodifferential equations of mixed type 1992

57. Z Wei Periodic boundary value problems for second order impulsive integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces[外文期刊] 1995

58. 闫宝强. 傅希林 具有无限滞的脉冲泛函微分方程解的存在性[期刊论文]-中国学术期刊文摘 1999(12)

59. Z He. J Yu Periodic boundary value problem for first order impulsive ordinary differential equations 2002

60. R P Agarwal. D O'Regan Multiple nonnegative solutions for second order impulsive dif ferential equations 2000

61. L Yong. C F Zhong. L Z Hua Periodic boundary value problems for impulsive differential equations 1997

62. D Jiang On the existence of positive solutions to a second order periodic BVP 1998

63. E K Lee. Y H Lee Multiple positive solutions of singular two point boundary value prob lems for second order impulsive differential equations 2004

64. P W Eloe. J Handerson positive solutions of boundary value problems for ordinary differ ential equations with impulse 1998

65. 刘衍胜 Banach空间中一类奇异脉冲微分方程边值问题多个正解的存在性[期刊论文]-系统科学与数学 2003(2)

66. J J Nieto Impulsive resonance periodic problems of first order[外文期刊] 2002

67. Pedro J Torres Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a Krasnoselskii fixed point theorem[外文期刊] 2003

68. F Merdivenci Atici. G Sh Guseinov On the existence of positive solutions for nonlin ear differential equations with periodic boundary conditions 2001

69. A C Lazer. S Solimini On periodic solutions of nonlinear differential equations with sin gularities 1987

70. M del Pino. R Manásevich. A Montero T-periodic solutions for some second-order differential equations with singularities 1992(120)

71. A Fonda. R Manásevich. F Zanolin Subharmonic solutions for some second order differential equations with singularities 1993

72. P Habets. L Sanchez Periodic solution of some Liénard equations with singularities 1990

73. M R Zhang Periodic solutions of Liénard equations with singular forces of repulsive type 1996

74. I Rachunková. M Tvrd(y). I Vrko(c) Existence of nonnegative and nonpositive solutions for second order periodic boundary value problems[外文期刊] 2001

75. D Q Jiang. J Chu. M Zhang Multiplicity of positive periodic solutions to superlinear repulsive singular equations[外文期刊] 2005

76. C De Coster. P Habets Upper and lower solutions in the theory of ODE boundary value problems:Classical and recent results[CISM-ICMS 371] 1996

77. M A del Pino. R F Manásevich. A Montero T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities 1992

78. Y Dong Invariance of homotopy and an extension of a theorem by Habets-Metzen on peri odic solutions of Duffing equations 2001

79. L H Erbe. R M Mathsen Positive solutions for singular nonlinear boundary value problems 2001

80. A Fonda Periodic solutions of scalar second order differential equations with a singularity, Mém 1993

81. 傅希林. 闫宝强. 刘衍胜 脉冲微分系统引论 2005

82. J Mawhin Topological degree and boundary value problems for nonlinear differential equa tions 1993

83. D O'Regan Existence Theory for Nonlinear Ordinary Differential Equations 1997

84. X Tang. Z He. J Yu Stability theorems for delay differential equations with impulses 2002

85. Y Liu. W Ge Stibility theorems and existence results for periodic solutions of nonlinear im pulsive delay differential equations with variable coefficients 2004

86. P J Torres. M Zhang A monotone iterative scheme for a nonlinear second order equa tion based on a generalized anti-maximum principle 2003

87. Irena Rachunková. Jan Tomecek Impulsive BVPs with nonlinear boundary conditions for the second order differential equations without growth restrictions[外文期刊] 2004

88. D Y jun Periodic Boundary Value Problems for Functional Differential Equations with Impulses 1997

89. Cushing J M Intergrodifferential equations and delay models in population dynamics 1977

90. W Ding. M Han Periodic boundary value problem for the second order impulsive func tional differential equations 2004

91. Cushing J M Forced asymptotically periodic solutions of predator-prey systems with or without hereditary effects 1976(04)

92. S G Hristova. D D Bainov Monotone-Iterative Techniques of V. Lakshmikantham for a Boundary Value Problem for Systems of Impulsive Differential-Difference Equations 1996

93. L H Erbe. D Guo Periodic boundary value problems for second order integrodifferential equations of mixed type 1992

94. Z L Wei Periodic boundary value problems for second order impulsive integrodifferential equations of mixed type in Banach spaces[外文期刊] 1995

95. A M Samoilenko. N A Perestyuk Differential Equations with Impulse Effect (in Russian) 1987

96. Cushing J M Two species competition in a periodic environment 1980

97. L Yong. C F Zhong. L Z Hua Periodic boundary value problems for impulsive differential equations 1997

98. R P Agarwal. D O Regan Multiple nonnegative solutions for second order impulsive dif ferential equations 2000

99. E K Lee. Y H Lee Multiple positive solutions of singular two point boundary value problems for second order impulsive differential equations[外文期刊] 2004

100. P W Eloe. J Handerson positive solutions of boundary value problems for ordinary differ ential equations with impulse 1998

101. Cushing J M Periodic Lotka-Volterra competition equations 1986

102. M Zhang A relationship between the periodic and the Dirichlet BVPs of singular differential equations 1998

103. V Bevc. J L Palmer. C Süsskind On the design of the transition region of axi symmetric magnetically focusing beam valves 1958

104. T Ding A boundary value problem for the periodic Brillouin focusing system 1965

105. Y Liu Structure of a class singular boundary value problem with superlinear effect 2003

106. M A del Pino. R F Manásevich. A Montero T-periodic solutions for some second order differential equations with singularities 1992

107. J Lei. X Li. P Yan. M. Zhang Twist character of the least amplitude periodic solution of the forced pendulem 2003

108. Y Liu. A Qi Positive solutions of nonlinear singular boundary value problem in abstract space 2004

109. Y Liu. B Yah Multiple solutions of singular boundary value problem for differential sys tems 2003(02)

110. A V Anokhin. L Berezansky. E Braverman Exponential stability oflinear delay impulsive differential equations 1995

111. K Wang. K Huang Ch-spaces and the boundedness of solutions for functional differential equations and periodic solutions 1987

112. L Wen. P Weng Weakly exponentially asymptotic stability of functional differential equa tion with impulse, Dynamics of Countinous 1999

113. J Shen. J Yan Razumikhin type stability theorems for impulsive functional differential equations 1998

114. J S Yu. B G Zhang Stability theorems for delay differential equations with impulses 1996

115. B Yan Multiple unbounded solutions boundary value problems for second order differential equations on the half line 2002

116. B Yan. Y Liu Unbounded solution of the singular boundary value problem for second order differential equations on the half-line 2004

117. B Yan. X Liu Multiple solutions of impulsive boundary value problems on the half-line Banach spaces 2000(02)

118. May R M Theoretical Ecology, Principle and Applications 1976

119. R E Gaines. J L Mawhin Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations 1977

120. P Yang. R Xu Global Asymptotic Stability of Periodic Solution in N-Species Cooperative System with Time Delays 1998

121. 张晓颖. 柏灵. 范猛. 王克 具有holling III类功能反应的捕食者食系统差分方程周期解的存在性[英文][期刊论文]-应用数学 2002(3)

122. 郭大钧. 孙经先 抽象空间常微分方程 1989

123. D Guo. VLakshmikantham Nonlinear Problems in Abstract Cones 1988

124. A V Anokhin. L Berezansky. E Braverman Exponential stability of linear delay impulsive differential equations[外文期刊] 1995

125. X Zhang. Z Shuai. K Wang Optimal impulsive harvesting policy for single population 2003

126. 高海音. 张晓颖. 翁世有 一类非自治n种群互惠系统的周期正解[期刊论文]-东北师大学报（自然科学版） 2004(4)

127. 柏灵. 王克 一类具有比率型功能反应的食物链系统周期解的存在性[期刊论文]-东北师大学报(自然科学版) 2003(1)

128. 张晓颖. 王克 具时滞的 N 种群互惠系统的概周期解[期刊论文]-东北师大学报(自然科学版) 2002(3)

129. R E Gaines. J L Mawhin Coincidence Degree and Nonlinear Differential Equations 1977

130. C W Clark MathematicalBio-economics:The optimal management ofrenewable resources 1990

131. G V Tsretkva Construction of an optimal policy taking into account ecological constraints(Russian),Modelling of natural system and optimal control problems(Russian) 1995

132. Yoshizawa T Stability theory and the existence of periodic solutions and almost periodic solutions 1975

133. A W Lcung Optimal harvesting-coefficient control of steady-state prey-predator diffusive Volterra-Lotka systems[外文期刊] 1995(02)

134. M Fan.K Wang Optimal harvesting policy for single population with periodic coeffi cients 1998

135. Luis H R Alvarez.Larry A Shepp Optimal harvesting of stochastically fluctuating pop ulations 1998

136. Ballinger G.X Liu Permanence of population growth models with impulsive effects 1997

137. D Franco.Juan J Nieto First-order impulsive ordinary differential equations with anti periodic and nonlinear boundary conditions 2000

138. Z Luo.J Shen Stability and boundedness for impulsive functional differential equations with infinite delays 2001

139. J Angelova.A Dishliev Optimization problems for one-impulsive models from popula tion dynamics 2000

140. 陈兰荪 脉冲微分方程与生命科学[期刊论文]-平顶山师专学报 2002(2)

141. X N Liu.L S Chen Complex dynamics of Holling type Ⅱ Lotka - Volterra predator - prey system with impulsive perturbations on the predator 2003

142. S W Zhang.F Y Wang.L S Chen A food chain model with impulsive perturbations and Holling Ⅳ functional response 2005

143. S W Zhang.L S Chen A Holling Ⅱ functional response food chain model with impulsive perturbations 2005

144. S W Zhang.L S Chen Chaos in three species food chain system with impulsive perturba tions 2005

145. G Z Zeng.L S Chen.L H Sun Complexity of an SIR epidemic dynamics model with impulsive vaccination control 2005

146. 刘兵.陈兰荪.张玉娟 基于IPM策略的捕食与被捕食系统的动力学性质[期刊论文]-工程数学学报 2005(1)

147. 张艳燕.傅希林 脉冲混合系统的稳定性分析[期刊论文]-山东师范大学学报(自然科学版) 2003(2)

148. 韩晓明.傅希林 多个李雅普诺夫函数方法与实际渐近稳定[期刊论文]-科学技术与工程 2003(5)

149. 郗强.傅希林 锥值Lyapunov函数和脉冲混合系统的稳定性[期刊论文]-科学技术与工程 2005(13)

150. 傅希林.綦建刚.刘衍胜 脉冲自治系统周期解存在及吸引的充要条件[期刊论文]-数学年刊A辑 2002(4)

151. 张艳燕.傅希林 脉冲混合系统的严格一致稳定性质[期刊论文]-科学技术与工程 2003(5)

152. 孙晓辉.傅希林 非线性微分系统的(h0,h,M0)-一致有界性质[期刊论文]-科学技术与工程 2003(3)

153. 盖明久.时宝.张德存 一阶泛函微分方程解的存在唯一性[期刊论文]-工程数学学报 2003(4)

154. 盖明久.时宝.张德存 二阶混合型泛函微分方程边值问题解的存在性[期刊论文]-应用数学学报 2002(4)

155. 盖明久.时宝.张德存 二阶奇异泛函微分方程的两点边值问题[期刊论文]-数学年刊A辑 2001(6)

156. 陈安平.曹进德.黄立宏 时滞BAM神经网络周期解的存在性和全局指数稳定性[期刊论文]-应用数学学报 2005(2)

3. 胡军浩 时滞脉冲微分包含解的存在性和可控性研究[学位论文]2007

4. 赵立春 脉冲在动力系统中的应用[学位论文]2009

5. 李建利 脉冲微分方程边值问题和周期解[学位论文]2006

6. 李文宽.肖祖国.赵晓临.于永清.姜航.孙忠生.LI Wen-kuan.XIAO Zu-guo.ZHAO Xiao-lin.YU Yong-qing.JIANG Hang.SUN Zhong-sheng 中华绒螯蟹稻田放养规格和密度对其产量的影响[期刊论文]-水产科学2009,28(1)

7. 贾对红.JIA Dui-hong 高阶非线性脉冲时滞微分方程的振动性[期刊论文]-长春大学学报（自然科学版）2010,20(1)

8. 杨凤勉 非线性微分系统正解的存在性[学位论文]2008

9. 李兴昌.赵增勤 一类奇异无穷边值问题正解的存在性[期刊论文]-系统科学与数学2009,29(8)

10. 孙忠民.赵增勤.Sun Zhongmin.Zhao Zengqin 三阶微分方程组边值问题常号解的存在性[期刊论文]-系统科学与数学2007,27(6)